Задачи тестирования по миникурсу А.В. Михайлова
“Можно ли услышать форму барабана?”

Видео лекций на странице `https://cis.uniyar.ac.ru/event/213`

Задача 1. (15 баллов)

Колебания струны длины L, закрепленной в точках $x = 0$ и $x = L$, описываются волновым уравнением

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

где a – некоторая константа. Играя медиатором, мы отклонили струну на расстояние b в точке $x = a$ и отпустили её. Таким образом,

$$u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{b}{a}x, & 0 \le x \le a \\ \\ \dfrac{b(L-x)}{L-a} & a < x \le L \end{cases}, \qquad u_t(x,0) = 0.$$

На лекциях мы показали, что движение струны может быть представлено в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\frac{\pi k x}{L} \cos\frac{a\pi k t}{L}.$$

Пользуясь ортогональностью функций $e_n = \sin\frac{\pi n x}{L}$ относительно скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle = \int_0^L f(x) g(x)\, dx,$$

найти коэффициенты c_k.

(Подсказка: Ортогональность означает, что скалярное произведение $\langle e_n, e_m \rangle$ равно нулю, если $n \ne m$. Также можно использовать равенство $\langle e_n, e_n \rangle = L/2$.)

Задача 2. (15 баллов)

Анализируя частоты звуков, которые производит прямоугольный барабан, было обнаружено, что квадраты двух самых маленьких собственных угловых частот (колебаний в секунду $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$) равны $\nu_1^2 = 120$ и $\nu_2^2 = 210$ соответственно.

(1) Найти отношение сторон барабана.
(2) Найти квадраты следующих двух собственных частот прямоугольного барабана.

(Подсказка: Собственные угловые частоты барабана имеют вид $\omega_{n,m} = \alpha\sqrt{n^2 + \gamma^2 m^2}$, где γ – это отношение сторон барабана, α – это константа, зависящая от натяжения и плотности мембраны, а n, m – натуральные числа.)

Задача 3. (20 баллов)

На лекциях мы показали, что движение мембраны квадратного барабана со стороной L может быть представлено как линейная суперпозиция

$$u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{n,m} u_{n,m}$$

нормальных мод

$$u_{n,m} = \sin\frac{\pi n x}{L} \sin\frac{\pi m y}{L} \sin(\omega_{n,m} t), \qquad \omega_{n,m} = \frac{\alpha}{L}\sqrt{n^2 + m^2},$$

где α – это константа, зависящая от натяжения и плотности мембраны.

Показать, что функция $u_* = u_{1,2} + u_{2,1}$ является частным решением (собственной функцией) для треугольного барабана с мембраной в области

$$x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad x + y \le L.$$

Попробуйте найти другие собственные моды этого треугольного барабана.