



Общероссийский математический портал

А. Каибханов, А. Б. Скопенков, Примеры трансцендентных чисел, *Матем. про-  
св.*, 2006, выпуск 10, 176–184

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и  
согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 128.75.169.117

17 октября 2021 г., 17:21:35



## Примеры трансцендентных чисел

А. Каибханов

А. Скопенков\*

*Wenn Sie unterrichten und davon ausgehen, dass sich parallele Linien im Unendlichen berühren, ergibt sich doch, das müssen Sie zugeben, so etwas wie Transzendenz.*

G. Grass, Katz und Maus

*Если Вы учите, что параллельные линии пересекаются в бесконечности, то Вы всё же должны согласиться: получается нечто непостижимое.*

Г. Грасс, Кошка и мышка

Приводится простое доказательство трансцендентности числа Лиувилля и новое простое доказательство трансцендентности числа Малера.

### ВВЕДЕНИЕ

Число  $x$  называется *трансцендентным*, если оно не является корнем алгебраического уравнения

$$a_t \lambda^t + a_{t-1} \lambda^{t-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

с целыми коэффициентами  $a_t \neq 0$ ,  $a_{t-1}, \dots, a_0$ .

В университете или даже в старших классах изучается теоретико-множественное доказательство существования трансцендентных чисел [2, Гл. 2, §6]. Это доказательство не дает конкретного примера трансцендентного числа. Приведение *явных* примеров трансцендентных чисел и доказательство их трансцендентности является более трудным материалом, который не всегда входит даже в программу университетского

---

\*А. Скопенков поддержан Российским Фондом Фундаментальных Исследований, гранты номер 05-01-00993 и 04-01-00682, грантами Президента РФ НШ-1988.2003.1 и МД-3938.2005.1, а также стипендией П. Делиня, основанной на его Премии Бальзана 2004 года.

курса. В данной заметке мы приведем такие примеры и доказательства их трансцендентности, которые будут понятны даже старшеклассникам.

Этот абзац предназначен читателям, не знакомым с трансцендентными числами. Ясно, что любое рациональное число не является трансцендентным. Число  $y$  называется *алгебраическим*, если оно не трансцендентно. Поэтому алгебраические числа — нечто промежуточное между рациональными числами и произвольными вещественными числами. Зачем нужно доказывать трансцендентность чисел? Одной из мотивировок является то, что всякое *построимое* число (т.е. число, которое может быть построено с помощью циркуля и линейки) является алгебраическим. Таким образом, любое трансцендентное число не построимо [2, Гл. 2, §6 и Гл. 3, §3].

Первый явный пример трансцендентного числа был приведен Жозефом Лиувилем в 1835 г. [2, Гл. 2, §6].

ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ. Число  $\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n!}$  трансцендентно.

Лиувиль доказал также более общий результат. Приводимая ниже формулировка общей теоремы Лиувилля используется в настоящем тексте *только* для мотивировки нижеследующей теоремы Малера.

ОБЩАЯ ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ. Пусть  $z$  — алгебраическое число, являющееся корнем многочлена степени  $n > 1$ . Тогда  $z$  не может быть приближено рациональным числом  $\frac{p}{q}$  с точностью лучшей, чем  $\frac{1}{q^{n+1}}$ ; другими словами, при достаточно больших целых  $q$  непременно выполняется неравенство  $|z - \frac{p}{q}| > \frac{1}{q^{n+1}}$ . [2, Гл. 2, §6].

В 1929 г. Курт Малер доказал трансцендентность следующего числа [4].

ТЕОРЕМА МАЛЕРА. Число  $\mu = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2^n}$  трансцендентно.

Трансцендентность этого числа Малера не следует из общей теоремы Лиувилля, а также из теорем Туэ, Зигеля и Рота [2, Гл. 2, §6], [3]. В работе [4] был получен более общий результат. Доказательство в [4] (так же как и в [5]) неэлементарно и длинно (ср. [1]).

Главный результат данной заметки — *короткое элементарное доказательство трансцендентности числа Малера* (основанное на двоичной записи). Видимо, это доказательство является новым. Оно представлено в разделе «Доказательство теоремы Малера» и не использует остальной части заметки. Но для удобства читателей мы представляем некоторые идеи этого доказательства в разделах «Идея простого доказательства теоремы Малера» и «Основное наблюдение для доказательства теоремы

Малера». Наши идеи дают более общий результат, который приводится в последнем разделе.

Мы также приведем короткое элементарное доказательство трансцендентности числа Лиувилля. Это доказательство представлено в следующем разделе и хорошо известно специалистам, однако мы не нашли его в опубликованном виде.

Данная заметка была представлена в 2002 г. А. Каибхановым на международной конференции Intel ISEF (США, Луисвилль), а также И. Никошевым и А. Скопенковым на Летней Конференции Турнира Городов (Россия, Белорецк). Мы выражаем благодарность А. Галочкину и Д. Лешко за полезные обсуждения.

### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ЛИУВИЛЛЯ

Обозначим  $\lambda_s = \sum_{n=0}^s 2^{-n!}$ .

Сначала докажем, что число Лиувилля  $\lambda$  иррационально. Предположим, напротив, что существует линейный многочлен  $f(x) = bx + c$  с целыми коэффициентами  $b \neq 0$  и  $c$  такой, что  $f(\lambda) = 0$ . Заметим, что это уравнение имеет только один корень, значит  $f(\lambda_s) \neq 0$  для некоторого  $s > |b|$ . Мы получим противоречие из следующих неравенств для некоторого  $s > |b|$ :

$$2^{-s!} \leq |f(\lambda_s)| = |f(\lambda) - f(\lambda_s)| = |b| \cdot (\lambda - \lambda_s) < 2|b| \cdot 2^{-(s+1)!}.$$

Первое неравенство верно, так как  $f(\lambda_s) \neq 0$  может быть представлено как дробь со знаменателем  $2^{s!}$ . Последнее неравенство верно, так как

$$0 < \lambda - \lambda_s < 2^{-(s+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2 \cdot 2^{-(s+1)!}.$$

Теперь докажем, что число Лиувилля  $\lambda$  не является квадратичной иррациональностью, т. е. не является корнем квадратного уравнения  $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$  с целыми коэффициентами  $a \neq 0$ ,  $b$  и  $c$ . Предположим, напротив, что  $\lambda$  является корнем такого уравнения. Так как квадратное уравнение имеет не более двух корней, то  $f(\lambda_s) \neq 0$  для достаточно больших  $s$ . Тогда для достаточно больших  $s$  мы получим противоречие из следующих неравенств:

$$2^{-2s!} \leq |f(\lambda_s)| = |f(\lambda) - f(\lambda_s)| = (\lambda - \lambda_s) \cdot |a(\lambda + \lambda_s) + b| < < (2|a|\lambda + |b|) \cdot 2 \cdot 2^{-(s+1)!}.$$

Первое неравенство верно, так как  $f(\lambda_s) \neq 0$  может быть представлено как дробь со знаменателем  $2^{2s!}$ . Последнее неравенство доказывается аналогично случаю линейного многочлена.

Наконец, приведем доказательство трансцендентности числа Лиувилля  $\lambda$ . Предположим, напротив, что число  $\lambda$  является корнем алгебраического уравнения  $f(x) = a_t x^t + a_{t-1} x^{t-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$  с целыми коэффициентами  $a_0, \dots, a_{t-1}, a_t \neq 0$ . Так как это уравнение имеет лишь конечное число корней, то  $f(\lambda_s) \neq 0$  для достаточно больших  $s$ . Тогда для достаточно больших  $s$  мы получим противоречие из следующих неравенств:

$$2^{-ts!} \leq |f(\lambda_s)| = |f(\lambda) - f(\lambda_s)| = (\lambda - \lambda_s) \cdot \left| \sum_{0 \leq i < n \leq t} a_n \lambda^{n-1-i} \lambda_s^i \right| < C \cdot 2^{-(s+1)!},$$

где  $C$  не зависит от  $s$  (но зависит от коэффициентов многочлена  $f$ ). Первое неравенство верно, так как  $f(\lambda_s) \neq 0$  может быть представлено как дробь со знаменателем  $2^{ts!}$ . Последнее неравенство доказывается аналогично случаю многочленов первой и второй степени.  $\square$

### Идея простого доказательства теоремы Малера

Мы продемонстрируем идею доказательства на следующем примере. Мы докажем, что число Лиувилля

$$\nu = \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-2^n} = 0,11010001000000010\dots$$

не является квадратичной иррациональностью, т.е. корнем квадратного уравнения  $x^2 + bx + c = 0$  с целыми коэффициентами  $b$  и  $c$ . (Аналогично доказывается, что число Малера  $\mu$  не является квадратичной иррациональностью.) Рассмотрим десятичную запись числа  $-b\nu - c$  для некоторых целых  $b$  и  $c$  одного знака (случай различных знаков доказывается аналогично). Рассмотрим ненулевые цифры в этой десятичной записи, расположенные достаточно далеко от запятой. Ясно, что они образуют «сгустки» около позиций с номерами  $2^n$ : каждый «сгусток» представляет число  $|b|$ . Например для  $b = -17$  мы имеем следующее:

$$17\nu - c = \dots,87170017000000170\dots 017\dots$$

С другой стороны,

$$\nu^2 = \sum_{k,l=0}^{\infty} 10^{-2^k-2^l} = 0,0121220\dots 122020002000000012\dots$$

Таким образом, в десятичной записи числа  $\nu^2$  ненулевые цифры расположены около позиций с номерами  $2^k + 2^l$ . Но для достаточно больших  $l$  и  $k = 2l$  на этих же позициях числа  $-b\nu - c$  стоят нули. Следовательно  $\nu^2 \neq -b\nu - c$ . Значит,  $\nu$  не является квадратичной иррациональностью.

ОСНОВНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА  
ТЕОРЕМЫ МАЛЕРА

Мы продемонстрируем одну из наших главных идей на следующем примере. Мы докажем, что число  $E = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}$  иррационально для любой ограниченной последовательности  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  ненулевых целых чисел. (Заметим, что  $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ .)

Предположим, напротив, что  $E$  рационально. Тогда существуют сколь угодно большие  $q$ , для которых

$$E = \frac{p}{q} = \sum_{n=0}^q \frac{a_n}{n!} + \frac{a_{q+1}}{(q+1)!} + \sum_{n=q+2}^{\infty} \frac{a_n}{n!}.$$

Поэтому

$$p(q-1)! - \sum_{n=0}^q \frac{q!a_n}{n!} = \frac{a_{q+1}}{q+1} + \sum_{n=q+2}^{\infty} \frac{q!a_n}{n!}$$

целое число. Но это невозможно, так как для достаточно больших  $q$  имеем

$$\left| \sum_{n=q+2}^{\infty} \frac{q!a_n}{n!} \right| \leq C \cdot \sum_{n=q+2}^{\infty} \frac{q!}{n!} < C \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^n} = \frac{C}{(q+1)q} < \frac{1}{q+1} \leq \left| \frac{a_{q+1}}{q+1} \right| < \frac{1}{2}.$$

□

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ МАЛЕРА

Возьмем многочлен  $f(x) = a_t x^t + a_{t-1} x^{t-1} + \dots + a_1 x + a_0$  с целыми коэффициентами  $a_t \neq 0$ ,  $a_{t-1}, \dots, a_0$ . Выберем достаточно большое число  $p$  и положим  $s = 2^p(2^t - 1) - 2^{p-1}$ . (В двоичной записи  $s = 1 \dots 1010 \dots 0$  с  $t$  единицами и  $p$  нулями). Достаточно доказать, что

*дробная часть  $\{2^s f(\mu)\}$  не равна нулю.*

(Это число является « $s$ -хвостом» десятичной записи числа  $f(\mu)$ : его двоичное разложение получено из двоичного разложения числа  $f(\mu)$  отбрасыванием всех знаков слева от  $s$ -го знака после запятой.)

Раскрывая скобки, получим

$$\mu^q = \left( \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2^n} \right)^q = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(q) 2^{-n},$$

где  $d_n(q)$  есть количество упорядоченных представлений числа  $n$  в виде суммы  $q$  степеней двойки (не обязательно различных степеней). Другими словами,  $d_n(q)$  является количеством упорядоченных наборов  $(w_1, \dots, w_q)$  длины  $q$  таких, что  $n = 2^{w_1} + \dots + 2^{w_q}$  (возможно  $w_i = w_j$ ). Например,  $d_3(2) = 2$ , поскольку  $3 = 2^0 + 2^1 = 2^1 + 2^0$  и  $d_0(0) = 1$ .

Имеем

$$f(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n 2^{-n}, \quad \text{где } d_n = a_t d_n(t) + a_{t-1} d_n(t-1) + \dots + a_0 d_n(0).$$

Ясно, что  $d_n(q) = 0$  тогда и только тогда, когда  $n$  имеет более  $q$  единиц в двоичной записи. Обозначим через  $U_q$  множество чисел  $n$ , имеющих не более  $q$  единиц в двоичной записи. Тогда  $d_n = 0$  для  $n \notin U_q$ .

Число  $s_1 = 2^p(2^t - 1)$  — наименьшее число из  $U_t$ , большее, чем  $s$  (в двоичной записи  $s_1 = 1 \dots 10 \dots 0$  с  $t$  единицами и  $p$  нулями). Число  $s_2 = 2^{t+p}$  — наименьшее число из  $U_t$ , большее, чем  $s_1$ . Следовательно

$$\{2^s f(\mu)\} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} d_n 2^{s-n} \right\} = \left\{ d_{s_1} 2^{s-s_1} + \sum_{n=s_2}^{\infty} d_n 2^{s-n} \right\}.$$

Тогда

$$\{2^s f(\mu)\} \neq 0, \quad \text{поскольку } \left| \sum_{n=s_2}^{\infty} d_n 2^{s-n} \right| \stackrel{(1)}{<} 2^{s-s_1} |d_{s_1}| \stackrel{(2)}{<} 1/2.$$

Для доказательства неравенств (1) и (2) нам понадобится следующая лемма, которую мы докажем позже.

**ЛЕММА О ПРЕДСТАВЛЕНИИ.** *Количество  $d_n(q)$  упорядоченных представлений числа  $n$  в виде суммы  $q$  степеней двойки не превосходит  $(q!)^2$ .*

Из леммы о представлении получаем, что существует число  $D = D(f)$  такое, что  $|d_n| \leq D$  для каждого  $n$ . Следовательно неравенство (2) верно, так как  $|d_{s_1}| 2^{s-s_1} \leq D \cdot 2^{-2^{p-1}} < 1/2$  для достаточно больших  $p$ . Неравенство (1) верно, так как для достаточно больших  $p$  (аналогично утверждению о  $\lambda - \lambda_s$  для числа Лиувилля)

$$\left| \sum_{n=s_2}^{\infty} d_n 2^{s-n} \right| \leq D \sum_{n=s_2}^{\infty} 2^{s-n} = D \cdot 2^{s+1-s_2} = D \cdot 2^{s-s_1+1-2^p} < < 2^{s-s_1} \leq 2^{s-s_1} |d_{s_1}|.$$

Здесь последнее неравенство верно, так как  $s_1 \in U_t - U_{t-1}$ , и  $d_{s_1}(q) = 0$  для  $q < t$ , следовательно  $d_{s_1} = a_t d_{s_1}(t) \neq 0$ .  $\square$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ О ПРЕДСТАВЛЕНИИ.** Для  $q = 0$  имеем  $d_0(0) = 1 \leq 0!^2$ . Для  $q \geq 1$  имеем  $d_n(q) = \sum_{r=0}^{\infty} d_{n-2^r}(q-1)$ . Следовательно, при помощи индукции по  $q$  получаем, что достаточно доказать следующее утверждение:

*для каждого  $n \in U_q$  существует не более  $q^2$  целых  $r \geq 0$  таких, что  $n - 2^r \in U_{q-1}$ .*

Рассмотрим двоичное представление числа  $n \in U_q$ :

$$n = 2^{w_k} + 2^{w_{k-1}} + \dots + 2^{w_1}, \quad \text{где } w_k > w_{k-1} > \dots > w_1 \geq 0 \text{ и } k \leq q.$$

Обозначим  $w_0 = -1$ . Так как  $n - 2^r < 0$  для  $r > w_k$ , то достаточно доказать, что

для каждого  $i = 1, 2, \dots, k$  существует не более  $q$  целых  $r \in [w_{i-1} + 1, w_i]$  таких, что  $n - 2^r \in U_{q-1}$ .

Следовательно, достаточно доказать, что

для каждого  $i = 1, 2, \dots, k$  и  $r \in [w_{i-1} + 1, w_i - q]$  имеем  $n - 2^r \notin U_{q-1}$ .

Чтобы доказать это утверждение, заметим, что  $2^{w_i} - 2^r = 2^{w_i-1} + 2^{w_i-2} \dots + 2^r$  есть сумма  $w_i - r \geq q$  различных степеней двойки, каждая из которых больше  $2^{w_{i-1}}$  и меньше  $2^{w_i} < 2^{w_{i+1}}$ . Поэтому число  $n - 2^r$  представляется в виде суммы более чем  $q - 1$  различных степеней двойки. Значит,  $n - 2^r \notin U_{q-1}$ .  $\square$

### ОБОБЩЕНИЕ

Предположим, что дана строго возрастающая последовательность  $\{a_n\}$  натуральных чисел.

Пусть дано натуральное число  $q$ . Натуральное число  $m$  называется  $q$ -представимым, если  $m$  можно представить в виде суммы не более чем  $q$  членов последовательности  $\{a_i\}$ :  $m = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_q}$ . Эти члены не обязательно различны (например, число  $m = a_2 + a_2$  является 2-представимым).

Последовательность  $\{a_i\}$  называется  $q$ -разреженной, если для любого целого  $M$  существует три последовательных  $q$ -представимых числа  $a$ ,  $b$  и  $c$ , промежутки между которыми больше  $M$  (т.е. таких, что  $b - a > M$  и  $c - b > M$ ).

Последовательность  $\{a_i\}$  называется разреженной, если она  $q$ -разрежена для любого  $q$ .

Например, последовательность  $a_i = i$  всех целых положительных чисел является 1-представимой, следовательно, эта последовательность не 1-разрежена и тем более не разрежена. При доказательстве теоремы Малера было доказано, что последовательность  $2^i$  является разреженной.

Последовательность  $\{a_n\}$  натуральных чисел называется  $q$ -рыхлой, если количество способов представления числа  $n$  в виде суммы  $q$  членов этой последовательности (не обязательно различных) не превосходит некоторой константы  $C_q$ , не зависящей от  $n$  (но, возможно, зависящей от  $q$ ). Сформулируем это немного по-другому. Для любых натуральных  $q$  и  $n$  обозначим через  $d_n(q)$  количество представлений числа  $n$  в виде суммы  $q$  (не обязательно различных) членов последовательности  $\{a_i\}$  с учетом

порядка. Другими словами,  $d_n(q)$  — это количество упорядоченных наборов  $(a_{i_1}, \dots, a_{i_q})$  с  $n = a_{i_1} + \dots + a_{i_q}$ . Последовательность  $\{a_i\}$  называется  $q$ -рыхлой, если существует число  $C_q$  такое, что  $d_n(q) < C_q$  при любом  $n$ .

Последовательность  $\{a_i\}$  называется *рыхлой*, если она является  $q$ -рыхлой для любого натурального  $q$ .

Например последовательность  $a_i = i$  не рыхлая и даже не 2-рыхлая. Действительно, натуральное число  $n$  имеет не менее  $n/2 - 1$  представлений в виде суммы двух натуральных чисел, таким образом  $d_n(2) \geq n/2 - 1$ . Из леммы о представлении вытекает, что последовательность  $2^i$  является рыхлой.

Аналогично приведённому доказательству теоремы Малера можно доказать следующий результат.

**ТЕОРЕМА.** Если последовательность  $\{a_n\}$  рыхлая и разреженная, то число  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-a_n}$  трансцендентно.

Было бы интересно обобщить наше доказательство трансцендентности числа Малера и приведённой теоремы до достаточного условия трансцендентности числа, включающего два «хороших» приближения этого числа.

Авторы не знают, являются ли следующие числа трансцендентными (или квадратичными иррациональностями):

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} d_n 2^{-2^n}$  для любой ограниченной последовательности  $d_n$  целых положительных чисел.

(b)  $\sum_{n=0}^{\infty} d_n 2^{-2^n}$  для любой последовательности  $0 \leq d_n \leq n$ .

(c)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{-2^n}$ .

(d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n 2^{-2^n}$  для любой последовательности  $\varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ .

(e)  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-[1, 1^n]}$ .

(f)  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-f_n}$ , где  $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ ,  $f_0 = f_1 = 1$  — последовательность Фибоначчи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Галочкин А. *О мере трансцендентности значений функций, удовлетворяющих некоторым функциональным уравнениям* // Мат. Заметки, 1980. Т. 27, №2. С. 175–183.
- [2] Курант Р., Роббинс Г. *Что такое математика?* М.: МЦНМО, 2001.
- [3] Фельдман Н. *Алгебраические и трансцендентные числа* // Квант, №7, 1983. С. 2–7.
- [4] Mahler K. *Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen* // Mathematische Annalen, 1929. Bd. 1. S. 342–366.
- [5] Nishioka K. *Mahler functions and transcendence*. Lecture Notes in Math., 1631. Berlin – New York, 1996.

---

А. Б. Скопенков, кафедра дифференциальной геометрии и приложений, механико-математический факультет, Московский государственный университет, Москва, 119992, Россия; Независимый московский университет, Б. Власьевский пер., 11, Москва, 119002, Россия.

E-mail: [skopenko@mcsme.ru](mailto:skopenko@mcsme.ru)

А. Каибханов, кафедра дифференциальной геометрии и приложений, механико-математический факультет, Московский государственный университет, Москва, 119992, Россия.

E-mail: [kaib@mail.ru](mailto:kaib@mail.ru)