

Общероссийский математический портал

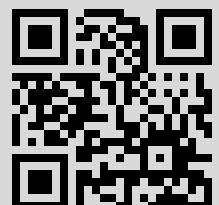
А. Каибханов, А. Б. Скопенков, Примеры трансцендентных чисел, *Матем. про-
св.*, 2006, выпуск 10, 176–184

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 128.75.169.117

17 октября 2021 г., 17:21:35



Примеры трансцендентных чисел

А. Каибханов

А. Скопенков*

Wenn Sie unterrichten und davon ausgehen, dass sich parallele Linien im Unendlichen berühren, ergibt sich doch, das müssen Sie zugeben, so etwas wie Transzendenz.

G. Grass, Katz und Maus

Если Вы учите, что параллельные линии пересекаются в бесконечности, то Вы всё же должны согласиться: получается нечто непостижимое.

Г. Грасс, Кошка и мышка

Приводится простое доказательство трансцендентности числа Лиувилля и новое простое доказательство трансцендентности числа Малера.

ВВЕДЕНИЕ

Число x называется *трансцендентным*, если оно не является корнем алгебраического уравнения

$$a_t \lambda^t + a_{t-1} \lambda^{t-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

с целыми коэффициентами $a_t \neq 0$, a_{t-1}, \dots, a_0 .

В университете или даже в старших классах изучается теоретико-множественное доказательство существования трансцендентных чисел [2, Гл. 2, §6]. Это доказательство не дает конкретного примера трансцендентного числа. Приведение *явных* примеров трансцендентных чисел и доказательство их трансцендентности является более трудным материалом, который не всегда входит даже в программу университетского

*А. Скопенков поддержан Российским Фондом Фундаментальных Исследований, гранты номер 05-01-00993 и 04-01-00682, грантами Президента РФ НШ-1988.2003.1 и МД-3938.2005.1, а также стипендией П. Делиня, основанной на его Премии Бальзана 2004 года.

курса. В данной заметке мы приведем такие примеры и доказательства их трансцендентности, которые будут понятны даже старшеклассникам.

Этот абзац предназначен читателям, не знакомым с трансцендентными числами. Ясно, что любое рациональное число не является трансцендентным. Число y называется *алгебраическим*, если оно не трансцендентно. Поэтому алгебраические числа — нечто промежуточное между рациональными числами и произвольными вещественными числами. Зачем нужно доказывать трансцендентность чисел? Одной из мотивировок является то, что всякое *построимое* число (т.е. число, которое может быть построено с помощью циркуля и линейки) является алгебраическим. Таким образом, любое трансцендентное число не построимо [2, Гл. 2, §6 и Гл. 3, §3].

Первый явный пример трансцендентного числа был приведен Жозефом Лиувилем в 1835 г. [2, Гл. 2, §6].

ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ. Число $\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n!}$ трансцендентно.

Лиувиль доказал также более общий результат. Приводимая ниже формулировка общей теоремы Лиувилля используется в настоящем тексте *только* для мотивировки нижеследующей теоремы Малера.

ОБЩАЯ ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ. Пусть z — алгебраическое число, являющееся корнем многочлена степени $n > 1$. Тогда z не может быть приближено рациональным числом $\frac{p}{q}$ с точностью лучшей, чем $\frac{1}{q^{n+1}}$; другими словами, при достаточно больших целых q непременно выполняется неравенство $|z - \frac{p}{q}| > \frac{1}{q^{n+1}}$. [2, Гл. 2, §6].

В 1929 г. Курт Малер доказал трансцендентность следующего числа [4].

ТЕОРЕМА МАЛЕРА. Число $\mu = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2^n}$ трансцендентно.

Трансцендентность этого числа Малера не следует из общей теоремы Лиувилля, а также из теорем Туэ, Зигеля и Рота [2, Гл. 2, §6], [3]. В работе [4] был получен более общий результат. Доказательство в [4] (так же как и в [5]) неэлементарно и длинно (ср. [1]).

Главный результат данной заметки — *короткое элементарное доказательство трансцендентности числа Малера* (основанное на двоичной записи). Видимо, это доказательство является новым. Оно представлено в разделе «Доказательство теоремы Малера» и не использует остальной части заметки. Но для удобства читателей мы представляем некоторые идеи этого доказательства в разделах «Идея простого доказательства теоремы Малера» и «Основное наблюдение для доказательства теоремы

Малера». Наши идеи дают более общий результат, который приводится в последнем разделе.

Мы также приведем короткое элементарное доказательство трансцендентности числа Лиувилля. Это доказательство представлено в следующем разделе и хорошо известно специалистам, однако мы не нашли его в опубликованном виде.

Данная заметка была представлена в 2002 г. А. Каибхановым на международной конференции Intel ISEF (США, Луисвилль), а также И. Никошевым и А. Скопенковым на Летней Конференции Турнира Городов (Россия, Белорецк). Мы выражаем благодарность А. Галочкину и Д. Лешко за полезные обсуждения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ЛИУВИЛЛЯ

Обозначим $\lambda_s = \sum_{n=0}^s 2^{-n!}$.

Сначала докажем, что число Лиувилля λ иррационально. Предположим, напротив, что существует линейный многочлен $f(x) = bx + c$ с целыми коэффициентами $b \neq 0$ и c такой, что $f(\lambda) = 0$. Заметим, что это уравнение имеет только один корень, значит $f(\lambda_s) \neq 0$ для некоторого $s > |b|$. Мы получим противоречие из следующих неравенств для некоторого $s > |b|$:

$$2^{-s!} \leq |f(\lambda_s)| = |f(\lambda) - f(\lambda_s)| = |b| \cdot (\lambda - \lambda_s) < 2|b| \cdot 2^{-(s+1)!}.$$

Первое неравенство верно, так как $f(\lambda_s) \neq 0$ может быть представлено как дробь со знаменателем $2^{s!}$. Последнее неравенство верно, так как

$$0 < \lambda - \lambda_s < 2^{-(s+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2 \cdot 2^{-(s+1)!}.$$

Теперь докажем, что число Лиувилля λ не является квадратичной иррациональностью, т. е. не является корнем квадратного уравнения $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами $a \neq 0$, b и c . Предположим, напротив, что λ является корнем такого уравнения. Так как квадратное уравнение имеет не более двух корней, то $f(\lambda_s) \neq 0$ для достаточно больших s . Тогда для достаточно больших s мы получим противоречие из следующих неравенств:

$$\begin{aligned} 2^{-2s!} \leq |f(\lambda_s)| &= |f(\lambda) - f(\lambda_s)| = (\lambda - \lambda_s) \cdot |a(\lambda + \lambda_s) + b| < \\ &< (2|a|\lambda + |b|) \cdot 2 \cdot 2^{-(s+1)!}. \end{aligned}$$

Первое неравенство верно, так как $f(\lambda_s) \neq 0$ может быть представлено как дробь со знаменателем $2^{2s!}$. Последнее неравенство доказывается аналогично случаю линейного многочлена.

Наконец, приведем доказательство *трансцендентности числа Лиувилля* λ . Предположим, напротив, что число λ является корнем алгебраического уравнения $f(x) = a_t x^t + a_{t-1} x^{t-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ с целыми коэффициентами $a_0, \dots, a_{t-1}, a_t \neq 0$. Так как это уравнение имеет лишь конечное число корней, то $f(\lambda_s) \neq 0$ для достаточно больших s . Тогда для достаточно больших s мы получим противоречие из следующих неравенств:

$$2^{-ts!} \leq |f(\lambda_s)| = |f(\lambda) - f(\lambda_s)| = (\lambda - \lambda_s) \cdot \left| \sum_{0 \leq i < n \leq t} a_n \lambda^{n-1-i} \lambda_s^i \right| < C \cdot 2^{-(s+1)!},$$

где C не зависит от s (но зависит от коэффициентов многочлена f). Первое неравенство верно, так как $f(\lambda_s) \neq 0$ может быть представлено как дробь со знаменателем $2^{ts!}$. Последнее неравенство доказывается аналогично случаю многочленов первой и второй степени. \square

ИДЕЯ ПРОСТОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ МАЛЕРА

Мы продемонстрируем идею доказательства на следующем примере. Мы докажем, что число Лиувилля

$$\nu = \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-2^n} = 0,11010001000000010\dots$$

не является *квадратичной иррациональностью*, т.е. корнем квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами b и c . (Аналогично доказывается, что число Малера μ не является квадратичной иррациональностью.) Рассмотрим десятичную запись числа $-b\nu - c$ для некоторых целых b и c одного знака (случай различных знаков доказывается аналогично). Рассмотрим ненулевые цифры в этой десятичной записи, расположенные достаточно далеко от запятой. Ясно, что они образуют «сгустки» около позиций с номерами 2^n : каждый «сгусток» представляет число $|b|$. Например для $b = -17$ мы имеем следующее:

$$17\nu - c = \dots,87170017000000170\dots 017\dots$$

С другой стороны,

$$\nu^2 = \sum_{k,l=0}^{\infty} 10^{-2^k-2^l} = 0,0121220\dots 122020002000000012\dots$$

Таким образом, в десятичной записи числа ν^2 ненулевые цифры расположены около позиций с номерами $2^k + 2^l$. Но для достаточно больших l и $k = 2l$ на этих же позициях числа $-b\nu - c$ стоят нули. Следовательно $\nu^2 \neq -b\nu - c$. Значит, ν не является квадратичной иррациональностью.

ОСНОВНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА
ТЕОРЕМЫ МАЛЕРА

Мы продемонстрируем одну из наших главных идей на следующем примере. Мы докажем, что число $E = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}$ иррационально для любой ограниченной последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ненулевых целых чисел. (Заметим, что $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.)

Предположим, напротив, что E рационально. Тогда существуют сколь угодно большие q , для которых

$$E = \frac{p}{q} = \sum_{n=0}^q \frac{a_n}{n!} + \frac{a_{q+1}}{(q+1)!} + \sum_{n=q+2}^{\infty} \frac{a_n}{n!}.$$

Поэтому

$$p(q-1)! - \sum_{n=0}^q \frac{q!a_n}{n!} = \frac{a_{q+1}}{q+1} + \sum_{n=q+2}^{\infty} \frac{q!a_n}{n!}$$

целое число. Но это невозможно, так как для достаточно больших q имеем

$$\left| \sum_{n=q+2}^{\infty} \frac{q!a_n}{n!} \right| \leq C \cdot \sum_{n=q+2}^{\infty} \frac{q!}{n!} < C \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^n} = \frac{C}{(q+1)q} < \frac{1}{q+1} \leq \left| \frac{a_{q+1}}{q+1} \right| < \frac{1}{2}.$$

□

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ МАЛЕРА

Возьмем многочлен $f(x) = a_t x^t + a_{t-1} x^{t-1} + \dots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами $a_t \neq 0$, a_{t-1}, \dots, a_0 . Выберем достаточно большое число p и положим $s = 2^p(2^t - 1) - 2^{p-1}$. (В двоичной записи $s = 1 \dots 1010 \dots 0$ с t единицами и p нулями). Достаточно доказать, что

дробная часть $\{2^s f(\mu)\}$ не равна нулю.

(Это число является « s -хвостом» десятичной записи числа $f(\mu)$: его двоичное разложение получено из двоичного разложения числа $f(\mu)$ отбрасыванием всех знаков слева от s -го знака после запятой.)

Раскрывая скобки, получим

$$\mu^q = \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2^n} \right)^q = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(q) 2^{-n},$$

где $d_n(q)$ есть количество упорядоченных представлений числа n в виде суммы q степеней двойки (не обязательно различных степеней). Другими словами, $d_n(q)$ является количеством упорядоченных наборов (w_1, \dots, w_q) длины q таких, что $n = 2^{w_1} + \dots + 2^{w_q}$ (возможно $w_i = w_j$). Например, $d_3(2) = 2$, поскольку $3 = 2^0 + 2^1 = 2^1 + 2^0$ и $d_0(0) = 1$.

Имеем

$$f(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n 2^{-n}, \quad \text{где } d_n = a_t d_n(t) + a_{t-1} d_n(t-1) + \dots + a_0 d_n(0).$$

Ясно, что $d_n(q) = 0$ тогда и только тогда, когда n имеет более q единиц в двоичной записи. Обозначим через U_q множество чисел n , имеющих не более q единиц в двоичной записи. Тогда $d_n = 0$ для $n \notin U_q$.

Число $s_1 = 2^p(2^t - 1)$ — наименьшее число из U_t , большее, чем s (в двоичной записи $s_1 = 1 \dots 10 \dots 0$ с t единицами и p нулями). Число $s_2 = 2^{t+p}$ — наименьшее число из U_t , большее, чем s_1 . Следовательно

$$\{2^s f(\mu)\} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} d_n 2^{s-n} \right\} = \left\{ d_{s_1} 2^{s-s_1} + \sum_{n=s_2}^{\infty} d_n 2^{s-n} \right\}.$$

Тогда

$$\{2^s f(\mu)\} \neq 0, \quad \text{поскольку } \left| \sum_{n=s_2}^{\infty} d_n 2^{s-n} \right| \stackrel{(1)}{<} 2^{s-s_1} |d_{s_1}| \stackrel{(2)}{<} 1/2.$$

Для доказательства неравенств (1) и (2) нам понадобится следующая лемма, которую мы докажем позже.

ЛЕММА О ПРЕДСТАВЛЕНИИ. *Количество $d_n(q)$ упорядоченных представлений числа n в виде суммы q степеней двойки не превосходит $(q!)^2$.*

Из леммы о представлении получаем, что существует число $D = D(f)$ такое, что $|d_n| \leq D$ для каждого n . Следовательно неравенство (2) верно, так как $|d_{s_1}| 2^{s-s_1} \leq D \cdot 2^{-2^{p-1}} < 1/2$ для достаточно больших p . Неравенство (1) верно, так как для достаточно больших p (аналогично утверждению о $\lambda - \lambda_s$ для числа Лиувилля)

$$\left| \sum_{n=s_2}^{\infty} d_n 2^{s-n} \right| \leq D \sum_{n=s_2}^{\infty} 2^{s-n} = D \cdot 2^{s+1-s_2} = D \cdot 2^{s-s_1+1-2^p} < < 2^{s-s_1} \leq 2^{s-s_1} |d_{s_1}|.$$

Здесь последнее неравенство верно, так как $s_1 \in U_t - U_{t-1}$, и $d_{s_1}(q) = 0$ для $q < t$, следовательно $d_{s_1} = a_t d_{s_1}(t) \neq 0$. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ О ПРЕДСТАВЛЕНИИ. Для $q = 0$ имеем $d_0(0) = 1 \leq 0!^2$. Для $q \geq 1$ имеем $d_n(q) = \sum_{r=0}^{\infty} d_{n-2^r}(q-1)$. Следовательно, при помощи индукции по q получаем, что достаточно доказать следующее утверждение:

для каждого $n \in U_q$ существует не более q^2 целых $r \geq 0$ таких, что $n - 2^r \in U_{q-1}$.

Рассмотрим двоичное представление числа $n \in U_q$:

$$n = 2^{w_k} + 2^{w_{k-1}} + \dots + 2^{w_1}, \quad \text{где } w_k > w_{k-1} > \dots > w_1 \geq 0 \text{ и } k \leq q.$$

Обозначим $w_0 = -1$. Так как $n - 2^r < 0$ для $r > w_k$, то достаточно доказать, что

для каждого $i = 1, 2, \dots, k$ существует не более q целых $r \in [w_{i-1} + 1, w_i]$ таких, что $n - 2^r \in U_{q-1}$.

Следовательно, достаточно доказать, что

для каждого $i = 1, 2, \dots, k$ и $r \in [w_{i-1} + 1, w_i - q]$ имеем $n - 2^r \notin U_{q-1}$.

Чтобы доказать это утверждение, заметим, что $2^{w_i} - 2^r = 2^{w_i-1} + 2^{w_i-2} \dots + 2^r$ есть сумма $w_i - r \geq q$ различных степеней двойки, каждая из которых больше 2^{w_i-1} и меньше $2^{w_i} < 2^{w_i+1}$. Поэтому число $n - 2^r$ представляется в виде суммы более чем $q - 1$ различных степеней двойки. Значит, $n - 2^r \notin U_{q-1}$. \square

ОБОБЩЕНИЕ

Предположим, что дана строго возрастающая последовательность $\{a_n\}$ натуральных чисел.

Пусть дано натуральное число q . Натуральное число m называется q -представимым, если m можно представить в виде суммы не более чем q членов последовательности $\{a_i\}$: $m = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_q}$. Эти члены не обязательно различны (например, число $m = a_2 + a_2$ является 2-представимым).

Последовательность $\{a_i\}$ называется q -разреженной, если для любого целого M существует три последовательных q -представимых числа a , b и c , промежутки между которыми больше M (т.е. таких, что $b - a > M$ и $c - b > M$).

Последовательность $\{a_i\}$ называется разреженной, если она q -разрежена для любого q .

Например, последовательность $a_i = i$ всех целых положительных чисел является 1-представимой, следовательно, эта последовательность не 1-разрежена и тем более не разрежена. При доказательстве теоремы Малера было доказано, что последовательность 2^i является разреженной.

Последовательность $\{a_n\}$ натуральных чисел называется q -рыхлой, если количество способов представления числа n в виде суммы q членов этой последовательности (не обязательно различных) не превосходит некоторой константы C_q , не зависящей от n (но, возможно, зависящей от q). Сформулируем это немного по-другому. Для любых натуральных q и n обозначим через $d_n(q)$ количество представлений числа n в виде суммы q (не обязательно различных) членов последовательности $\{a_i\}$ с учетом

порядка. Другими словами, $d_n(q)$ — это количество упорядоченных наборов $(a_{i_1}, \dots, a_{i_q})$ с $n = a_{i_1} + \dots + a_{i_q}$. Последовательность $\{a_i\}$ называется q -рыхлой, если существует число C_q такое, что $d_n(q) < C_q$ при любом n .

Последовательность $\{a_i\}$ называется *рыхлой*, если она является q -рыхлой для любого натурального q .

Например последовательность $a_i = i$ не рыхлая и даже не 2-рыхлая. Действительно, натуральное число n имеет не менее $n/2 - 1$ представлений в виде суммы двух натуральных чисел, таким образом $d_n(2) \geq n/2 - 1$. Из леммы о представлении вытекает, что последовательность 2^i является рыхлой.

Аналогично приведённому доказательству теоремы Малера можно доказать следующий результат.

ТЕОРЕМА. Если последовательность $\{a_n\}$ рыхлая и разреженная, то число $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-a_n}$ трансцендентно.

Было бы интересно обобщить наше доказательство трансцендентности числа Малера и приведённой теоремы до достаточного условия трансцендентности числа, включающего два «хороших» приближения этого числа.

Авторы не знают, являются ли следующие числа трансцендентными (или квадратичными иррациональностями):

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} d_n 2^{-2^n}$ для любой ограниченной последовательности d_n целых положительных чисел.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} d_n 2^{-2^n}$ для любой последовательности $0 \leq d_n \leq n$.

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{-2^n}$.

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n 2^{-2^n}$ для любой последовательности $\varepsilon_n \in \{\pm 1\}$.

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-[1, 1^n]}$.

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-f_n}$, где $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $f_0 = f_1 = 1$ — последовательность Фибоначчи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Галочкин А. *О мере трансцендентности значений функций, удовлетворяющих некоторым функциональным уравнениям* // Мат. Заметки, 1980. Т. 27, №2. С. 175–183.
- [2] Курант Р., Роббинс Г. *Что такое математика?* М.: МЦНМО, 2001.
- [3] Фельдман Н. *Алгебраические и трансцендентные числа* // Квант, №7, 1983. С. 2–7.
- [4] Mahler K. *Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen* // Mathematische Annalen, 1929. Bd. 1. S. 342–366.
- [5] Nishioka K. *Mahler functions and transcendence*. Lecture Notes in Math., 1631. Berlin – New York, 1996.

А. Б. Скопенков, кафедра дифференциальной геометрии и приложений, механико-математический факультет, Московский государственный университет, Москва, 119992, Россия; Независимый московский университет, Б. Власьевский пер., 11, Москва, 119002, Россия.

E-mail: skopenko@mcsme.ru

А. Каибханов, кафедра дифференциальной геометрии и приложений, механико-математический факультет, Московский государственный университет, Москва, 119992, Россия.

E-mail: kaib@mail.ru