Конспект и задачи тестирования по миникурсу С.А. Игонина “Решение дифференциальных уравнений с помощью симметрий”

Этот конспект основан на миникурсе из двух лекций, прочитанных в ЯрГУ в апреле 2019 года. Видео лекций доступно на сайте `https://cis.uniyar.ac.ru/event/180`

Конспект покрывает не все содержание лекций, но достаточен для решения задач тестирования, которые приведены на странице 8.

Вопросы можно задавать Сергею Александровичу Игонину `<s-igonin@yandex.ru>`.

Используемые обозначения:

- $\det(M)$ – определитель квадратной матрицы M;
- M^T – транспонированная матрица для матрицы M;
- m, n – натуральные (целые положительные) числа;
- $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ – множество всех матриц размера $n \times n$ с вещественными элементами;
- элементы матрицы $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ обозначаются M_{ij}, где $i, j = 1, \dots, n$;
- $\mathrm{tr}\, M$ – след матрицы $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, который задается формулой $\mathrm{tr}\, M = \sum_{i=1}^n M_{ii}$;
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ – множество невырожденных (обратимых) матриц размера $n \times n$ с вещественными элементами;
- E_n – единичная матрица размера $n \times n$;
- для матриц $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ их коммутатор $[A, B]$ задается формулой $[A, B] = AB - BA$;
- длина вектора $v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ обозначается $|v|$ и вычисляется по формуле

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_m^2}.$$

Напомним некоторые свойства матриц.

Предложение 1. *Матрица $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ невырождена (обратима) тогда и только тогда, когда $\det(M) \neq 0$. Таким образом, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) \neq 0\}$.*

Для каждой матрицы $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ существует обратная матрица $M^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ такая, что $MM^{-1} = M^{-1}M = E_n$.

Для любых $A, B, C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ и $p, q \in \mathbb{R}$ имеем

$$(AB)^T = B^T A^T, \qquad (pA + qB)^T = pA^T + qB^T, \qquad \det(A^T) = \det(A),$$
$$(pA + qB)C = pAC + qBC, \qquad C(pA + qB) = pCA + qCB,$$
$$\det(AB) = \det(A)\det(B), \qquad \det(E_n) = 1, \qquad E_n A = AE_n = A.$$

Если $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, то $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
Если $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, то $C^T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ и $(C^{-1})^T = (C^T)^{-1}$.

Определение 1. Множество G с операцией

$$\star\colon G \times G \to G, \qquad (a, b) \mapsto a \star b, \qquad a, b \in G,$$

называется *группой*, если

- операция $\star$ *ассоциативна*: для любых $a, b, c \in G$ выполнено равенство $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$,
- существует *нейтральный элемент* e, т.е. такой, что для любого $a \in G$ выполнены равенства $a \star e = e \star a = a$,
- все *элементы обратимы*: для каждого $a \in G$ существует элемент $a^{-1} \in G$ такой, что $a^{-1} \star a = a \star a^{-1} = e$.

Нейтральный элемент e также называется *единичным элементом* группы G. Для данного $a \in G$ элемент $a^{-1} \in G$ называется *обратным к a*.

Определение 2. *Подгруппой* группы G с операцией $\star$ называется подмножество $H \subset G$, являющееся группой относительно операции $\star$, т.е. обладающее свойствами:

- подмножество H содержит единичный элемент e;
- для любых $a, b \in H$ выполнено $a \star b \in H$;
- для любого элемента $a \in H$ его обратный a^{-1} также принадлежит подмножеству H.

Пример 1. Множество $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ является группой относительно операции умножения матриц. Единичная матрица E_n служит единичным элементом этой группы.

Подмножество $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$ является подгруппой группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Определение 3. Пусть X – множество. Для отображений $f\colon X \to X$ и $g\colon X \to X$ определена их композиция

$$f \circ g\colon X \to X, \qquad (f \circ g)(a) = f(g(a)), \qquad a \in X.$$

Преобразование множества X – это взаимно однозначное (биективное) отображение $f\colon X \to X$. Это значит, что существует *обратное* отображение f^{-1} такое, что

$$f\big(f^{-1}(a)\big) = f^{-1}\big(f(a)\big) = a \qquad \forall\, a \in X.$$

Рассмотрим *тождественное отображение* $\mathrm{Id}\colon X \to X$, задаваемое формулой $\mathrm{Id}(a) = a$ для всех $a \in X$. Тогда для любого преобразования $f\colon X \to X$ имеем $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$ и $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$.

Легко проверить, что преобразования множества X образуют группу относительно операции композиции отображений. Единичным элементом в этой группе служит тождественное преобразование Id.

Определение 4. Пусть G – группа, состоящая из преобразований множества X. (То есть, G является подгруппой группы всех преобразований множества X.)

Рассмотрим подмножество $Y \subset X$. Элемент $g \in G$ называется *симметрией множества Y в группе G*, если для любого элемента $a \in Y$ имеем $g(a) \in Y$ и $g^{-1}(a) \in Y$.

Множество таких симметрий обозначается $\mathrm{Sym}(Y, X, G)$ и является подгруппой группы G.

Пример 2. Пусть $X = \mathbb{R}^2$ – двумерная плоскость. Точка $v \in \mathbb{R}^2$ – это пара вещественных чисел $v = (v_1, v_2)$, где $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$. Расстояние между точками $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ и $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ задается формулой $d(v, w) = \sqrt{(v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2}$.

Напомним, что $\mathbb{R}^2$ является векторным (линейным) пространством размерности 2 над полем $\mathbb{R}$. Расстояние $d(v, w)$ равно длине $|v - w|$ вектора $v - w = (v_1 - w_1, v_2 - w_2) \in \mathbb{R}^2$.

Преобразование $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ называется *движением*, если f сохраняет расстояние между точками множества $\mathbb{R}^2$, т.е. $d(f(v), f(w)) = d(v, w)$ для любых $v, w \in \mathbb{R}^2$.

Пусть G – группа всех движений плоскости $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим квадрат в $\mathbb{R}^2$, задаваемый как подмножество

$$Y = \Big\{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; a_1, a_2 \in \mathbb{R},\ -\frac{1}{2} \le a_1, a_2 \le \frac{1}{2}\Big\}.$$

Можно доказать, что группа его симметрий $\mathrm{Sym}(Y, \mathbb{R}^2, G)$ состоит из 8 элементов

$$\mathrm{Id}, \quad p_1, \quad p_2, \quad p_3, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3, \quad s_4.$$

Здесь p_k – поворот вокруг центра квадрата на угол $\dfrac{k\pi}{2}$, $k = 1, 2, 3$; s_l – симметрия (отражение) относительно одной из четырех осей квадрата, $l = 1, 2, 3, 4$.

Пример 3. Пусть $X = \mathbb{R}^3$. Невырожденную матрицу $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ размера 3×3 можно рассматривать как линейное преобразование $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, определяемое формулой

$$A(V) = AV \in \mathbb{R}^3, \qquad V \in \mathbb{R}^3.$$

Здесь AV – произведение матрицы A на вектор-столбец V. Пусть $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

Пусть $Y = S^2 = \{V \in \mathbb{R}^3 \mid |V| = 1\}$ – единичная сфера в $\mathbb{R}^3$. Можно доказать, что матрица $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ является симметрией множества Y тогда и только тогда, когда $M^T M = E_3$, где E_3 – единичная матрица размера 3×3.

Согласно определению 5 ниже, такие матрицы называются ортогональными. Таким образом, группа $\mathrm{Sym}\big(S^2, \mathbb{R}^3, \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})\big)$ совпадает с группой

$$\mathrm{O}_3(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \mid M^T M = E_3\}.$$

Определение 5. Матрица $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ называется *ортогональной*, если $M^T M = E_n$. То есть, M является ортогональной, если $M^{-1} = M^T$.

Заметим, что свойство $M^{-1} = M^T$ также эквивалентно равенству $MM^T = E_n$.

Используя предложение 1, легко проверить, что множество ортогональных матриц

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid M^T M = E_n\}$$

является подгруппой группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Определение 6. Для векторов $V = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ и $W = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ определено скалярное произведение

$$\langle V, W \rangle = v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n.$$

Имеем $|V| = \sqrt{\langle V, V \rangle}$.

Векторы $V, W \in \mathbb{R}^n$ *ортогональны*, если $\langle V, W \rangle = 0$. Векторы $V^1, \ldots, V^n \in \mathbb{R}^n$ *образуют ортонормированный базис в* $\mathbb{R}^n$, если

$$\langle V^i, V^i \rangle = 1, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad \langle V^i, V^j \rangle = 0, \qquad i \neq j.$$

(То есть, векторы $V^1, \ldots, V^n$ попарно ортогональны, и длина каждого из них равна 1.)

Единичная $(n-1)$*-мерная сфера в* $\mathbb{R}^n$ – это множество $S^{n-1} = \{V \in \mathbb{R}^n \mid |V| = 1\}$.

Для любых $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ и $V \in \mathbb{R}^n$ определено произведение $MV \in \mathbb{R}^n$ матрицы M на вектор-столбец V. Матрица $D \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ называется *диагональной*, если $D_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$.

Доказательства предложения 2 и предложения 3 можно найти в учебниках линейной алгебры.

Предложение 2. *Пусть $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Следующие утверждения попарно эквивалентны:*

- *матрица M является ортогональной;*
- *для любых $V, W \in \mathbb{R}^n$ имеем $\langle MV, MW \rangle = \langle V, W \rangle$;*
- *для каждого $V \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство $|MV| = |V|$;*
- *строки матрицы M образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$;*
- *столбцы матрицы M образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$;*
- *для каждого $V \in S^{n-1}$ имеем $MV \in S^{n-1}$.*

Предложение 3. *Пусть $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ – симметрическая матрица, т.е $A^T = A$. Тогда существует $B \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ такая, что матрица BAB^T диагональна.*

При этом строки ортогональной матрицы B являются собственными векторами для матрицы A и образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

Предложение 4. *Пусть матрица $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ такова, что $\det(E_n + A) \neq 0$. Положим*

$$K(A) = (E_n - A) \cdot (E_n + A)^{-1}.$$

Тогда $\det\big(E_n + K(A)\big) \neq 0$ и

$$K\big(K(A)\big) = (E_n - K(A)) \cdot (E_n + K(A))^{-1} = A.$$

Доказательство. Имеем

$$E_n + K(A) = E_n + (E_n - A)(E_n + A)^{-1} = (E_n + A + E_n - A)(E_n + A)^{-1} = 2(E_n + A)^{-1},$$
$$E_n - K(A) = E_n - (E_n - A)(E_n + A)^{-1} = (E_n + A - E_n + A)(E_n + A)^{-1} = 2A(E_n + A)^{-1}.$$

Из этих равенств получаем, что матрица $E_n + K(A)$ обратима и $(E_n - K(A))(E_n + K(A))^{-1} = A$ $\square$

Определение 7. Рассмотрим множество $\mathbb{M} = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid \det(E_n + A) \neq 0\}$.

Согласно результату предложения 4, имеется отображение

$$K \colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}, \qquad K(A) = (E_n - A) \cdot (E_n + A)^{-1}, \qquad A \in \mathbb{M},$$

которое является преобразованием множества $\mathbb{M}$ и удовлетворяет $K \circ K = \mathrm{Id}$. Отображение $K \colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ называется *преобразованием Кэли для матриц*.

Лемма 1. *Пусть $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ и $C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ таковы, что $BC = CB$. Тогда $B^{-1}C = CB^{-1}$.*

Доказательство. Обозначим $M_1 = B^{-1}C$ и $M_2 = CB^{-1}$. Тогда $BM_1B = CB = BC = BM_2B$. Поскольку матрица B обратима, из $BM_1B = BM_2B$ получаем $M_1 = M_2$. $\square$

Матрица $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ называется *кососимметрической*, если $A^T = -A$.

Теорема 1. *Пусть $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ – кососимметрическая матрица такая, что $\det(E_n + A) \neq 0$. Тогда матрица $K(A) = (E_n - A)(E_n + A)^{-1}$ является ортогональной.*

Доказательство. Используя предложение 1 и свойство $A^T = -A$, получаем

$$\det(E_n - A) = \det\left((E_n - A)^T\right) = \det(E_n + A) \neq 0.$$

Поскольку $\det(E_n+A) \neq 0$ и $\det(E_n-A) \neq 0$, матрицы E_n+A, E_n-A и $K(A) = (E_n-A)(E_n+A)^{-1}$ обратимы.

Мы должны доказать $K(A)^T = K(A)^{-1}$. Используя предложение 1 и свойство $A^T = -A$, имеем

$$K(A)^T = \left((E_n + A)^{-1}\right)^T (E_n - A)^T = (E_n + A^T)^{-1}(E_n - A^T) = (E_n - A)^{-1}(E_n + A), \tag{1}$$

$$K(A)^{-1} = (E_n + A)(E_n - A)^{-1}. \tag{2}$$

Заметим, что $(E_n - A)(E_n + A) = (E_n + A)(E_n - A) = E_n - A^2$. Применяя лемму 1 к матрицам

$$B = E_n - A, \qquad C = E_n + A,$$

получаем

$$(E_n - A)^{-1}(E_n + A) = (E_n + A)(E_n - A)^{-1}. \tag{3}$$

Из (1), (2), (3) следует $K(A)^T = K(A)^{-1}$, т.е. матрица $K(A)$ является ортогональной. $\square$

Замечание 1. В одной из задач для тестирования требуется доказать такое свойство: если A – ортогональная матрица и $\det(E_n + A) \neq 0$, то матрица $K(A) = (E_n - A)(E_n + A)^{-1}$ – кососимметрическая.

Это свойство, предложение 4 и теорема 1 говорят, что преобразование Кэли устанавливает соответствие между кососимметрическими и ортогональными матрицами, удовлетворяющими условию $\det(E_n + A) \neq 0$.

Напомним, что подмножество $U \subset \mathbb{R}^m$ является *открытым*, если для любого $v \in U$ существует положительное вещественное число ε такое, что для любого $w \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющего $|w - v| < \varepsilon$, имеем $w \in U$.

Подмножество $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ называется *замкнутым*, если его дополнение $\mathbb{R}^m \setminus \tilde{U}$ открыто.

Таким образом, $U \subset \mathbb{R}^m$ открыто тогда и только тогда, когда $\mathbb{R}^m \setminus U$ замкнуто.

Предложение 5. *Пусть $f_i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, – непрерывные функции. Тогда для любых чисел $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ множество*

$$U^{a_1,\ldots,a_k}_{f_1,\ldots,f_k} = \{v \in \mathbb{R}^m \mid f_i(v) = a_i, \ \ i = 1, \ldots, k\}$$

является замкнутым.

Доказательство. Из определения непрерывных функций следует, что множество $U^{a_j}_{f_j} = \{v \in \mathbb{R}^m \mid f_j(v) = a_j\}$ для каждого $j = 1, \ldots, k$ является замкнутым.

Из определения открытых и замкнутых множеств следует, что пересечение любого набора замкнутых множеств является замкнутым. Следовательно, $U^{a_1,\ldots,a_k}_{f_1,\ldots,f_k}$ замкнуто, так как $U^{a_1,\ldots,a_k}_{f_1,\ldots,f_k}$ равно пересечению множеств $U^{a_j}_{f_j}$, $j = 1, \ldots, k$. $\square$

Поскольку $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ изоморфно пространству $\mathbb{R}^{n^2}$, можно говорить об открытых и замкнутых подмножествах пространства $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Поскольку определитель $\det\colon \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ является непрерывной функцией, по предложению 5 множество

$$S = \{M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 0\}$$

замкнуто в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Следовательно, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \setminus S$ открыто в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Определение 8. Подмножество $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ называется *замкнутым в* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, если существует замкнутое подмножество $Z \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ такое, что $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cap Z$.

Легко показать, что $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ замкнуто в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \setminus G$ открыто в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Определение 9. Подмножество $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ называется *матричной группой Ли*, если G замкнуто в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ и является подгруппой группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Пример 4. Имеем

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\} = \{M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}. \tag{4}$$

Поскольку $\det\colon \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ является непрерывной функцией, по предложению 5 множество $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ замкнуто в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ и, следовательно, замкнуто в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Легко проверить, что $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ – подгруппа группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Таким образом, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ является матричной группой Ли.

Пример 5. Имеем

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid M^T M = E_n\} = \{M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid M^T M = E_n\}. \tag{5}$$

Мы видим, что подмножество $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ задается некоторыми полиномиальными уравнениями на элементы матрицы M. По предложению 5 получаем, что множество $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ замкнуто в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ и, следовательно, замкнуто в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Используя предложение 1, легко проверить, что $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ – подгруппа группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Таким образом, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ является матричной группой Ли.

Для матриц $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ их *коммутатор* $[A, B]$ определяется формулой $[A, B] = AB - BA$. Некоторые свойства коммутатора описаны в следующем предложении, которое можно доказать прямым вычислением.

Предложение 6. *Для любых* $A, B, C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ *и* $p, q \in \mathbb{R}$ *имеем*

$$[A, pB + qC] = p[A, B] + q[A, C], \qquad [pB + qC, A] = p[B, A] + q[C, A],$$
$$[A, A] = 0, \qquad [A, B] = -[B, A], \qquad [[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0.$$

Определение 10. Векторное пространство $\mathbf{L}$ над полем $\mathbb{R}$ является *алгеброй Ли*, если на $\mathbf{L}$ задана операция, которая по двум элементам $A, B \in \mathbf{L}$ строит третий элемент $[A, B] \in \mathbf{L}$ и удовлетворяет следующим свойствам

$$[A, pB + qC] = p[A, B] + q[A, C], \qquad [pB + qC, A] = p[B, A] + q[C, A] \qquad \forall\, p, q \in \mathbb{R}, \tag{6}$$
$$[A, A] = 0, \tag{7}$$
$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0. \tag{8}$$

Также в этом случае говорят, что операция $[*, *]$ задает на пространстве $\mathbf{L}$ структуру алгебры Ли. (Обозначение $[*, *]$ говорит, что вместо $*$ можно подставлять элементы множества $\mathbf{L}$.)

Свойство (8) называется *тождеством Якоби.*

Заметим, что из свойств (6), (7) для любых $M, N \in \mathbf{L}$ следует

$$0 = [M + N, M + N] = [M, M] + [M, N] + [N, M] + [N, N] = [M, N] + [N, M].$$

Таким образом, имеем $[M, N] = -[N, M]$.

Подмножество $\mathbf{H} \subset \mathbf{L}$ называется *подалгеброй Ли в* $\mathbf{L}$, если для любых $A, B \in \mathbf{H}$ и $p, q \in \mathbb{R}$ справедливо

$$pA + qB \in \mathbf{H}, \qquad [A, B] \in \mathbf{H}.$$

Тогда $\mathbf{H}$ – векторное подпространство пространства $\mathbf{L}$ и тоже является алгеброй Ли с операцией $[*, *]$.

Замечание 2. В определении 10 мы говорим об алгебрах Ли над полем $\mathbb{R}$. Можно также рассматривать алгебры Ли над полем $\mathbb{C}$ и над другими полями.

Замечание 3. В названиях "группа Ли" и "алгебра Ли" слово "Ли" – это фамилия норвежского математика Софуса Ли (Sophus Lie, 1842–1899).

Из предложения 6 получаем

Теорема 2. *Пространство* $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ *с операцией, задаваемой коммутатором матриц, является алгеброй Ли.*

Теорема 3. *Множество всех кососимметрических матриц размера* $n \times n$

$$\mathfrak{so}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\} \tag{9}$$

является подалгеброй Ли в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. *Таким образом, пространство* $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ *– алгебра Ли относительно операции, задаваемой коммутатором матриц.*

Доказательство. Пусть $A, B \in \mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ и $p, q \in \mathbb{R}$. Поскольку $A^T = -A$ и $B^T = -B$, используя формулы из предложения 1, получаем

$$(pA + qB)^T = pA^T + qB^T = -pA - qB = -(pA + qB),$$
$$[A, B]^T = (AB)^T - (BA)^T = B^T A^T - A^T B^T = BA - AB = -[A, B].$$

Следовательно, $pA + qB \in \mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ и $[A, B] \in \mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$. □

Напомним, что *след* матрицы $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ задается формулой $\operatorname{tr} M = \sum_{i=1}^n M_{ii}$.

Для любой матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ определена экспонента

$$\mathrm{e}^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k. \tag{10}$$

Результаты, описанные в предложении 7 и предложении 8 ниже, хорошо известны.

Предложение 7. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Пусть A, B – дифференцируемые функции на интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}$, принимающие значения в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.*

(То есть, для любого $t \in (a, b)$ имеем $A(t), B(t) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, и элементы матриц $A(t)$, $B(t)$ являются дифференцируемыми функциями переменной t.)

Тогда

$$\frac{d}{dt}\big(A(t) \cdot B(t)\big) = \frac{d}{dt}\big(A(t)\big) \cdot B(t) + A(t) \cdot \frac{d}{dt}\big(B(t)\big). \tag{11}$$

Кроме того, если $A(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ для всех $t \in (a, b)$, то

$$\frac{d}{dt}\big(A(t)^{-1}\big) = -A(t)^{-1} \cdot \frac{d}{dt}\big(A(t)\big) \cdot A(t)^{-1},$$
$$\frac{d}{dt}\big(\det A(t)\big) = \det A(t) \cdot \operatorname{tr}\Big(A(t)^{-1} \frac{d}{dt}\big(A(t)\big)\Big). \tag{12}$$

Предложение 8. *Пусть $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Если $AB = BA$, то*

$$\mathrm{e}^A \cdot \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B}, \qquad B \cdot \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^A \cdot B.$$

В частности, имеем $\mathrm{e}^A \cdot \mathrm{e}^{-A} = \mathrm{e}^{A-A} = E_n$.

Если $AB \neq BA$, то может оказаться, что $\mathrm{e}^A \cdot \mathrm{e}^B \neq \mathrm{e}^{A+B}$.

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ и $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Тогда $\mathrm{e}^{CAC^{-1}} = C \cdot \mathrm{e}^A \cdot C^{-1}$.

Для подмножества $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ обозначим

$$L(G) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{e}^{tA} \in G \ \text{ для всех } t \in \mathbb{R}\}. \tag{13}$$

Можно доказать следующий важный результат.

Теорема 4. *Пусть $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ – матричная группа Ли. Тогда множество $L(G)$, определенное в (13), является подалгеброй Ли в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.*

Пример 6. Рассмотрим случай $G = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Согласно (13) и (5), имеем

$$L\big(\mathrm{O}_n(\mathbb{R})\big) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid (\mathrm{e}^{tA})^T \cdot \mathrm{e}^{tA} = E_n \ \text{ для всех } t \in \mathbb{R}\}.$$

Заметим, что из формулы (10) следует $(\mathrm{e}^{tA})^T = \mathrm{e}^{tA^T}$ для любой матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Докажем, что $L\big(\mathrm{O}_n(\mathbb{R})\big) = \mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$.

Пусть $A \in \mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$, т.е. $A^T = -A$. Тогда

$$(\mathrm{e}^{tA})^T \cdot \mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA^T} \cdot \mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{-tA} \cdot \mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{-tA+tA} = E_n \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, $A \in L\big(\mathrm{O}_n(\mathbb{R})\big)$.

Теперь пусть $B \in L\big(\mathrm{O}_n(\mathbb{R})\big)$, т.е. $(\mathrm{e}^{tB})^T \cdot \mathrm{e}^{tB} = \mathrm{e}^{tB^T} \cdot \mathrm{e}^{tB} = E_n$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Из формулы (10) следует

$$\frac{d}{dt}\big(\mathrm{e}^{tB^T}\big) = B^T \cdot \mathrm{e}^{tB^T}, \qquad \frac{d}{dt}\big(\mathrm{e}^{tB}\big) = B \cdot \mathrm{e}^{tB}. \tag{14}$$

Дифференцируя равенство $E_n = \mathrm{e}^{tB^T} \cdot \mathrm{e}^{tB}$ по t с использованием формул (11), (14), имеем

$$0 = \frac{d}{dt}\bigl(\mathrm{e}^{tB^T}\bigr) \cdot \mathrm{e}^{tB} + \mathrm{e}^{tB^T} \cdot \frac{d}{dt}\bigl(\mathrm{e}^{tB}\bigr) = B^T \cdot \mathrm{e}^{tB^T} \cdot \mathrm{e}^{tB} + \mathrm{e}^{tB^T} \cdot B \cdot \mathrm{e}^{tB}.$$

Подставляя $t = 0$ в равенстве $B^T \cdot \mathrm{e}^{tB^T} \cdot \mathrm{e}^{tB} + \mathrm{e}^{tB^T} \cdot B \cdot \mathrm{e}^{tB} = 0$, получаем $B^T + B = 0$, т.е. $B \in \mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$.

Таким образом, $L\bigl(\mathrm{O}_n(\mathbb{R})\bigr) = \mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$.

Пример 7. Рассмотрим случай $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Согласно (4) и (13), имеем

$$L\bigl(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})\bigr) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid \det(\mathrm{e}^{tA}) = 1 \ \text{ для всех } t \in \mathbb{R}\}.$$

Легко проверить, что для любых $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ справедливо $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$. Следовательно, $\operatorname{tr}[A, B] = 0$. Из этого следует, что множество

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} A = 0\}$$

является подалгеброй Ли в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Таким образом, пространство $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ с операцией, задаваемой коммутатором матриц, является алгеброй Ли.

Используя формулы (12), (10) и предложение 8 можно показать, что $L\bigl(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})\bigr) = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$.

Пример 8. Очевидно, что группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ тоже является матричной группой Ли.

Поскольку $\mathrm{e}^M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ для любой матрицы $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, из определения (13) множества $L(G)$ получаем $L\bigl(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\bigr) = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Можно доказать следующий полезный результат.

Теорема 5. *Пусть* $a, b, q \in \mathbb{R},\ a < q < b,$ *и* $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Пусть $A(t)$, $B(t)$ *– дифференцируемые функции на интервале* $(a, b) \subset \mathbb{R}$, *принимающие значения в* $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. (*То есть, для любого* $t \in (a, b)$ *имеем* $A(t), B(t) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, *и элементы матриц* $A(t)$, $B(t)$ *являются дифференцируемыми функциями переменной* t.)

Предположим, что функция $A(t)$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{d}{dt}\bigl(A(t)\bigr) = B(t) \cdot A(t), \qquad t \in (a, b),$$

и условию $A(q) = C$.

Пусть $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *– матричная группа Ли. Рассмотрим пространство* $L(G) \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, *определенное в* (13), *которое является подалгеброй Ли в* $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, *согласно теореме* 4.

Тогда, если $B(t) \in L(G)$ *для всех* $t \in (a, b)$, *то* $A(t) \cdot C^{-1} \in G$ *для всех* $t \in (a, b)$.

Применяя теорему 5 к случаю $G = \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\ L(G) = L\bigl(\mathrm{O}_n(\mathbb{R})\bigr) = \mathfrak{so}_n(\mathbb{R}),$ получаем

Следствие 1. *Пусть* $a, b, q \in \mathbb{R},\ a < q < b,$ *и* $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Пусть $B(t)$ *– дифференцируемая функция на интервале* $(a, b) \subset \mathbb{R}$, *принимающая значения в* $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$. (*То есть,* $B(t)^T = -B(t)$ *для всех* $t \in (a, b)$.)

Рассмотрим дифференцируемую функцию $A(t)$ *со значениями в* $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, *удовлетворяющую дифференциальному уравнению*

$$\frac{d}{dt}\bigl(A(t)\bigr) = B(t) \cdot A(t), \qquad t \in (a, b), \tag{15}$$

с условием $A(q) = C$.

Тогда $A(t) \cdot C^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *для всех* $t \in (a, b)$, *т.е.*

$$\bigl(A(t) \cdot C^{-1}\bigr)^T \cdot \bigl(A(t) \cdot C^{-1}\bigr) = E_n, \qquad t \in (a, b). \tag{16}$$

Поскольку $\bigl(A(t) \cdot C^{-1}\bigr)^T = \bigl(C^T\bigr)^{-1} \cdot A(t)^T$, *равенство* (16) *можно переписать в виде*

$$A(t)^T \cdot A(t) = C^T C, \qquad t \in (a, b). \tag{17}$$

Замечание 4. Равенство (17) дает много информации о функции $A(t)$.

Следствие 1 можно доказать и прямым вычислением, не ссылаясь на теорему 5. Но полезно иметь общее утверждение (теорему 5), применимое к любым матричным группам Ли.

Задачи для тестирования

Задача 1. (2 балла) Рассмотрим матрицы $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Вычислите коммутаторы $[e, f]$, $[h, e]$, $[h, f]$.

Задача 2. (3 балла) Рассмотрим матрицу $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$, где $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$, $d_1 \neq d_2 \neq d_3 \neq d_1$.
Пусть $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ удовлетворяет $[A, D] = 0$.

Докажите, что матрица A диагональна, т.е. $A_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$.

Задача 3. (4 балла) Пусть матрица $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ удовлетворяет $[A, B] = 0$ для всех $B \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$.

Докажите, что $A = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ для некоторого $d \in \mathbb{R}$.

Задача 4. (6 баллов) Пусть $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ такова, что $\det(E_n + A) \neq 0$. Положим

$$K(A) = (E_n - A) \cdot (E_n + A)^{-1}.$$

Докажите, что, если матрица A – ортогональная, то матрица $K(A)$ – кососимметрическая.

Задача 5. (6 баллов) Пусть $J \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Докажите, что множество

$$G(J) = \{Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid Q^T J Q = J\}$$

является подгруппой в группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Задача 6. (5 баллов) Пусть $J \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Докажите, что множество

$$M(J) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid A^T J + JA = 0\}$$

является подалгеброй Ли в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Задача 7. (14 баллов) Пусть $J \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Рассмотрим

$$M(J) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid A^T J + JA = 0\}, \qquad G(J) = \{Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid Q^T J Q = J\},$$

$$L\big(G(J)\big) = \{B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{e}^{tB} \in G(J) \text{ для всех } t \in \mathbb{R}\}.$$

Докажите равенство $L\big(G(J)\big) = M(J)$.

Задача 8. (10 баллов) Пусть $p_{12}(t)$, $p_{13}(t)$, $p_{23}(t)$ и $q_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, 3$, – дифференцируемые функции переменной $t \in \mathbb{R}$, принимающие значения в $\mathbb{R}$. Предположим, что эти функции удовлетворяют матричному уравнению

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q_{11}(t) & q_{12}(t) & q_{13}(t) \\ q_{21}(t) & q_{22}(t) & q_{23}(t) \\ q_{31}(t) & q_{32}(t) & q_{33}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p_{12}(t) & p_{13}(t) \\ -p_{12}(t) & 0 & p_{23}(t) \\ -p_{13}(t) & -p_{23}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11}(t) & q_{12}(t) & q_{13}(t) \\ q_{21}(t) & q_{22}(t) & q_{23}(t) \\ q_{31}(t) & q_{32}(t) & q_{33}(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

и условиям

$$q_{11}(7) = 1, \qquad q_{22}(7) = 2, \qquad q_{33}(7) = 3, \qquad q_{12}(7) = q_{13}(7) = q_{21}(7) = q_{23}(7) = q_{31}(7) = q_{32}(7) = 0.$$

Найдите многочлен P от двух переменных такой, что

$$\big(q_{33}(t)\big)^2 = P(q_{31}(t), q_{32}(t)), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

То есть, нужно выразить функцию $\big(q_{33}(t)\big)^2$ в виде многочлена от функций $q_{31}(t)$, $q_{32}(t)$. При решении этой задачи можно пользоваться всеми утверждениями данного конспекта, не доказывая их.

Решения задач надо записать и сдать Сергею Александровичу Игонину или Сотирису Георгиевичу Константину-Ризосу (7-й корпус, кабинет 439) **не позднее 14:15 15-го мая (среда)**.

Решения задач должны содержать описание и обоснование рассуждений/вычислений. Ответы, приведенные без обоснований, засчитаны не будут.