Задачи для тестирования по миникурсу В.Г. Горбунова "Спектральная теория тензоров и приложения в BigData"

Видео лекций доступно на странице `https://cis.uniyar.ac.ru/event/175`

Вначале дадим несколько определений и примеров, нужных для понимания задач.

Пусть $k, n_1, n_2, \ldots, n_k, n$ – натуральные числа.

Определение 1. *Тензор A размера $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$* – это набор чисел

$$A = (A_{i_1 i_2 \ldots i_k}), \qquad A_{i_1 i_2 \ldots i_k} \in \mathbb{R},$$

где $i_l = 1, 2, \ldots, n_l$ для каждого $l = 1, 2, \ldots, k$. Числа $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ называются *компонентами* тензора A.

Можно также рассматривать тензоры с комплексными компонентами $A_{i_1 i_2 \ldots i_k} \in \mathbb{C}$.

Напомним, что вектор $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ является ненулевым, если хотя бы одно из чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ не равно нулю.

Определение 2. Тензор $A = (A_{i_1 i_2 \ldots i_k})$ размера $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ *имеет ранг* 1, если существуют ненулевые векторы

$$B^j = (b_1^j, b_2^j, \ldots, b_{n_j}^j) \in \mathbb{C}^{n_j}, \qquad j = 1, \ldots, k,$$

такие, что

$$A_{i_1 i_2 \ldots i_k} = b_{i_1}^1 b_{i_2}^2 \ldots b_{i_k}^k \qquad \text{для всех } i_1, i_2, \ldots, i_k.$$

Также в этой ситуации говорят, что A *является тензором ранга* 1.

Определение 3. Пусть $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = n$. Тензор $A = (A_{i_1 i_2 \ldots i_k})$ размера $n \times n \times \ldots \times n$ называется *симметрическим*, если его компоненты $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ не меняются при любой перестановке индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k$.

Для симметрического тензора $A = (A_{i_1 i_2 \ldots i_k})$ определен однородный полином

$$\varphi_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{n} A_{i_1 i_2 \ldots i_k} \cdot x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \tag{1}$$

степени k от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Рассмотрим градиент этого полинома

$$\nabla\varphi_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Big(\frac{\partial\varphi_A(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi_A(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial\varphi_A(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_n}\Big). \tag{2}$$

Вектор $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ является *собственным вектором* тензора A, если

$$\nabla\varphi_A(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \lambda v$$

для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$.

Пример 1. Пусть $A = (A_{i_1 i_2 i_3})$ – симметрический тензор размера $2 \times 2 \times 2$ с компонентами

$$A_{111} = 5, \qquad A_{222} = 1,$$
$$A_{112} = A_{121} = A_{122} = A_{211} = A_{212} = A_{221} = 0.$$

По формуле (1) имеем $\varphi_A(x_1, x_2) = 5x_1^3 + x_2^3$. По формуле (2) получаем $\nabla\varphi_A(x_1, x_2) = (15x_1^2, 3x_2^2)$.

Следовательно, вектор $v = (v_1, v_2)$ является собственным вектором тензора A тогда и только тогда, когда

$$15v_1^2 = \lambda v_1, \tag{3}$$
$$3v_2^2 = \lambda v_2 \tag{4}$$

для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Чтобы описать все собственные вектора, рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $v_1 = 0$. Из уравнений (3), (4) следует, что $v = (0, v_2)$ является собственным вектором при любом $v_2 \in \mathbb{C}$.

Случай 2. Пусть $v_1 \neq 0$. Тогда из (3) получаем $\lambda = 15v_1$. Подставляя $\lambda = 15v_1$ в (4), имеем $3v_2^2 = 15v_1 v_2$. Следовательно, либо $v_2 = 0$, либо $v_2 = 5v_1$.

Таким образом, получаем следующий набор собственных векторов

$$v = (0, c), \qquad v = (c, 5c),$$

где $c \in \mathbb{C}$ – произвольная константа.

Задачи для тестирования

Задача 1. (2 балла) Пусть $A = (A_{i_1 i_2 i_3})$ – симметрический тензор размера $2 \times 2 \times 2$ с компонентами

$$A_{i_1 i_2 i_3} = i_1 + i_2 + i_3 - 4$$

для всех $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2\}$. Выпишите соответствующий полином $\varphi_A(x_1, x_2)$.

Задача 2. (3 балла) Пусть $A = (A_{i_1 i_2 i_3})$ – симметрический тензор размера $3 \times 3 \times 3$ такой, что

$$\varphi_A(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2 x_3.$$

Найдите компоненты $A_{i_1 i_2 i_3}$ этого тензора.

Задача 3. (6 баллов) Пусть $A = (A_{i_1 i_2 i_3})$ – симметрический тензор размера $3 \times 3 \times 3$ такой, что

$$\varphi_A(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + 7x_2^3 + x_3^3.$$

Найдите все собственные вектора этого тензора. (Нужно получить все собственные вектора и доказать, что других нет.)

Задача 4. (7 баллов) Рассмотрим тензор $A = (A_{i_1 i_2 i_3 i_4})$ размера $4 \times 4 \times 4 \times 4$ с компонентами

$$A_{1234} = 0, \qquad A_{i_1 i_2 i_3 i_4} = 1 \text{ при } (i_1 i_2 i_3 i_4) \neq (1234).$$

То есть, $A_{1234} = 0$, а все другие компоненты тензора A равны 1.

Докажите, что A не является тензором ранга 1.

Задача 5. (9 баллов) Рассмотрим симметрический тензор $A = (A_{i_1 i_2 i_3})$ размера $3 \times 3 \times 3$ с компонентами

$$A_{123} = A_{132} = A_{213} = A_{231} = A_{312} = A_{321} = 1,$$
$$A_{iij} = A_{iji} = A_{jii} = A_{iii} = 0 \quad \text{для всех } i, j = 1, 2, 3.$$

Найдите все собственные вектора этого тензора. (Нужно получить все собственные вектора и доказать, что других нет.)

Задача 6. (9 баллов) Пусть $A = (A_{i_1 i_2 i_3})$ – тензор размера $4 \times 5 \times 3$.

Докажите, что существуют натуральное число $m \leq 12$ и тензоры $T^1, \ldots, T^m$ размера $4 \times 5 \times 3$ такие, что T^i имеет ранг 1 для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$ и справедливо равенство

$$A = \sum_{i=1}^{m} T^i.$$

(То есть, надо доказать, что тензор A можно разложить в сумму $m \leq 12$ тензоров ранга 1.)

Нужно написать полное доказательство, не ссылаясь на результаты из лекций миникурса.

Задача 7. (14 баллов) Рассмотрим симметрическую матрицу

$$S = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -1 & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & 3\sqrt{2} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & -1 & -1 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

размера 4×4.

Найдите симметрические матрицы M_1, M_2, M_3 ранга 1 такие, что $S = M_1 + M_2 + M_3$. Вы должны не только предъявить матрицы M_1, M_2, M_3, но и объяснить, как вы их нашли.

Докажите, что не существует симметрических матриц W_1, W_2 ранга 1 таких, что $S = W_1 + W_2$. Нужно написать полное доказательство, не ссылаясь на результаты из лекций миникурса.

Решения задач надо записать и сдать Сергею Александровичу Игонину или Сотирису Георгиевичу Константину-Ризосу (7-й корпус, кабинет 439) **не позднее 16:00 25-го апреля (четверг)**.

Решения должны содержать описание и обоснование рассуждений/вычислений. Ответы, приведенные без обоснований, засчитаны не будут.

Вопросы можно задавать Сергею Александровичу Игонину <`s-igonin@yandex.ru`>.