Домашка №5

Кватернионы

Кватернион $q \in \mathbb{H}$ определяется как следующая сумма:

$$q = a + bi + cj + dk, \tag{1}$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, а i, j, k — *мнимые единицы*, обладающие следующим свойством:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1. \tag{2}$$

Умножение кватернионов не является коммутативным. Для удобства вычислений можно построить следующую таблицу перемножения мнимых единиц:

$$\begin{array}{r|l} ij = k & ji = -k, \\ jk = i & kj = -i, \\ ki = j & ik = -j. \end{array}$$

Также кватернион удобно рассматривать как вектор $q = (a, \vec{u})$, где a — действительная (скалярная) часть кватерниона q, а $\vec{u}$ — его мнимая часть, заданная трехмерным вектором $\vec{u} = bi + cj + dk = (b, c, d)$. В этом случае сложение и умножение задаётся следующим образом:

$$(a, \vec{u}) + (b, \vec{v}) = (a + b, \vec{u} + \vec{v}), \tag{3}$$

$$(a, \vec{u})(b, \vec{v}) = (ab - \vec{u} \cdot \vec{v}, a\vec{v} + b\vec{u} + \vec{u} \times \vec{v}). \tag{4}$$

Здесь «$\cdot$» обозначает скалярное произведение, а «$\times$» — векторное.

Сопряжение кватернионов

Сопряжение кватерниона $q = a + bi + cj + dk$ задается как

$$\overline{q} = a - bi - cj - dk. \tag{5}$$

Из такого определения сопряжения вытекает несколько удобных свойств:

$$\overline{pq} = \overline{q}\,\overline{p}, \tag{6}$$

$$q\overline{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |q|^2, \tag{7}$$

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}. \tag{8}$$

Также при помощи сопряжения можно задать скалярное и векторное произведения формулами, которые не будут явно зависеть от i, j, k:

$$p \cdot q = \frac{\overline{p}q + \overline{q}p}{2}, \tag{9}$$

$$p \times q = \frac{pq - qp}{2}. \tag{10}$$

Чистый кватернион

Чистым кватернионом называется кватернион $q \in \mathbb{H}_0$, у которого отсутствует скалярная часть, то есть $q = bi + cj + dk$.
Пусть даны два чистых кватерниона: $q_1 = b_1 i + c_1 j + d_1 k$ и $q_2 = b_2 i + c_2 j + d_2 k$. Тогда их произведение

$$q_1 q_2 = -\overline{q_1} \cdot \overline{q_2} + \overline{q_1} \times \overline{q_2}. \tag{11}$$

Заметим, что для чистого кватернион верно, что $\overline{q} = -q$.

Повороты в кватернионах

Пусть $x \in \mathbb{H}_0$ — чистый кватернион, а $q \in \mathbb{H}$. Тогда преобразование

$$x \mapsto qx\overline{q} \tag{12}$$

всегда будет давать чисто мнимый кватернион. При этом, если $q \in \mathbb{H}_0$, тогда данное преобразование будет сохранять длину вектора x.

Далее, для поворотов, полезно определить единичный кватернион q как сумму:

$$q = \cos\varphi + p\sin\varphi, \tag{13}$$

где $p \in \mathbb{H}_0$, $|p| = 1$ — единичный чистый кватернион, а φ — некоторый угол поворота.

Таким образом, преобразование (12) можно определить как поворот точки x в трехмерном пространстве относительно оси вращения p на угол 2φ.

Композиция вращения

$$pqv(pq)^{-1} = pqvq^{-1}p^{-1} \tag{14}$$

задаёт такое же вращение сначала на q, а затем на p.

Задачи

1. **(а)** Докажите, что любая абстрактная группа порядка 2 — это C_2. **(б)** Докажите, что единственная абстрактная группа порядка 4 — это C_4 и четверная группа (группа симметрий ромба).

2. Докажите, что в группе кватернионов выполняются соотношения

$$a^4 = b^4 = (ab)^4 = I.$$

Определение. Любая некоммутативная группа, все подгруппы которой нормальны, называется *гамильтоновой*.

3. Покажите, что любую конечную гамильтонову группу можно получить из группы кватернионов и абелевой группы с помощью конструкции прямого произведения групп.

4. Докажите, что умножение кватернионов, определенное равенством (4) ассоциативно. Для этого сначала докажите формулы, приведенные ниже (в них речь идет об обычных векторах).

(а) Формулу объема параллелепипеда: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

(б) Формулу «БАЦ минус ЦАБ»: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

(в) Тождество Якоби: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

А затем честно раскройте скобки.

5. Пусть r — поворот вокруг оси $(1, 0, 0)$ на угол $\frac{\pi}{3}$, а t — поворот на угол $\frac{2\pi}{3}$ вокруг оси $(1, 1, 1)$. Найдите ось и угол поворота $s = rt$.

6. Найдите группу вращений куба.