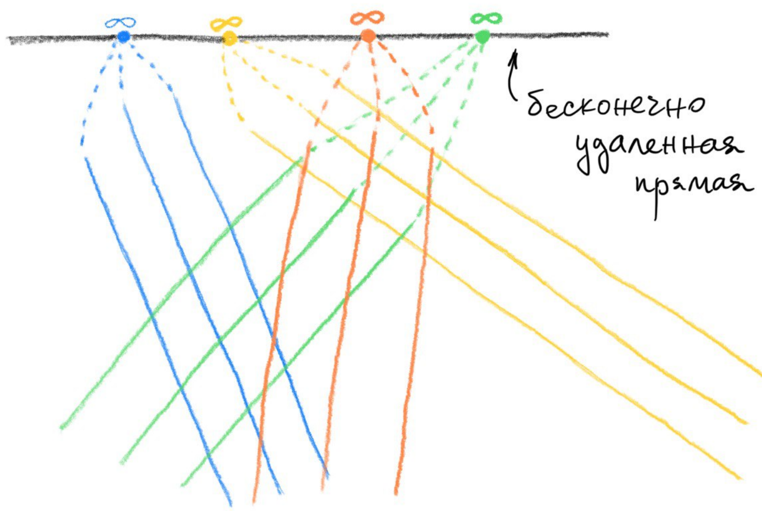
Домашка 1

Напоминания

Проективной прямой мы называем прямую с добавленной бесконечно удаленной точкой ∞.

Проективная плоскость — обычная евклидова плоскость с добавленной к ней бесконечно удаленной прямой. Точками этой прямой являются бесконечно удаленные точки, являющиеся пересечениями пучков параллельных прямых.



Двойным отношением четверки точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой, называют число

$$(A, B; C, D) = \frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d},$$

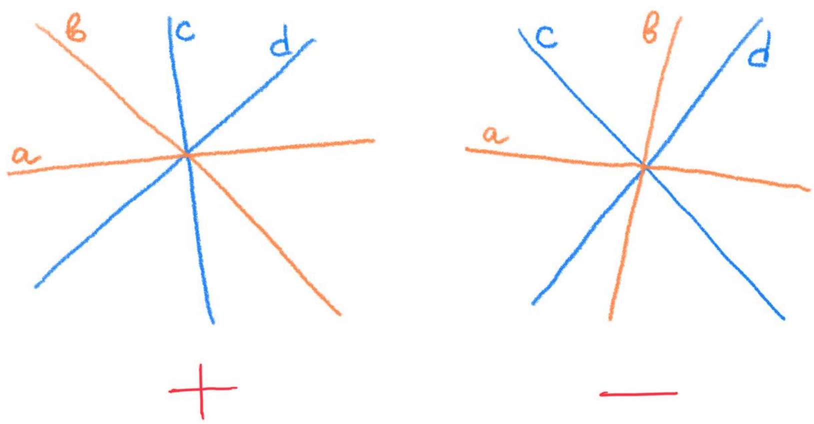
где через a, b, c, d обозначены координаты точек A, B, C, D соответственно.

Если одна из точек равна бесконечности, то нужно подставить ∞ в формулу выше и сократить выражения, содержащие ∞.

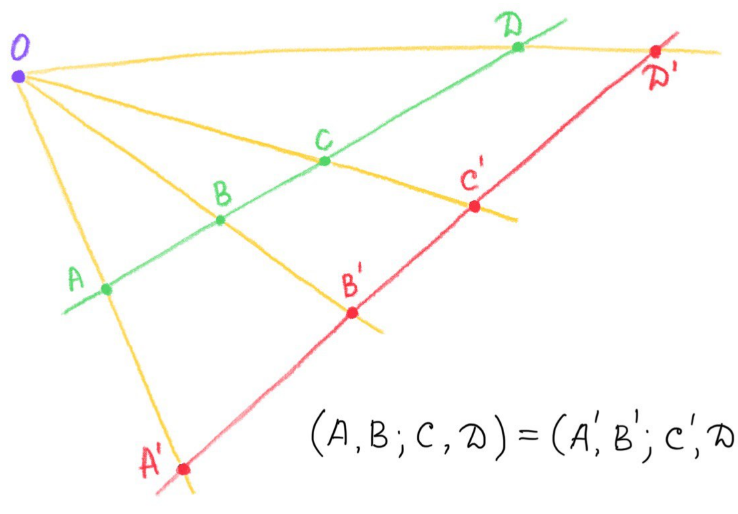
Двойным отношением четырех прямых a, b, c, d, проходящих через одну точку, называется выражение

$$(a, b; c, d) = \pm\frac{\sin\angle(a, c)}{\sin\angle(a, d)} : \frac{\sin\angle(b, c)}{\sin\angle(b, d)},$$

причем знак «$-$» ставится в том случае, когда прямые c и d лежат в разных углах между прямыми a и b.



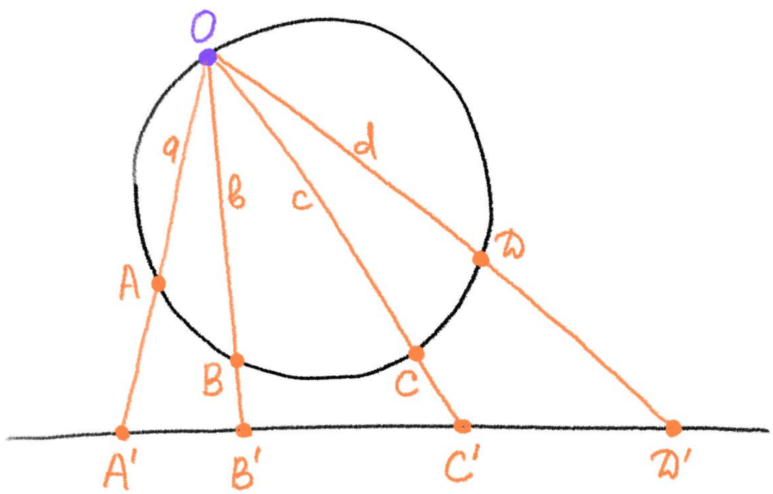
Центральное проектирование сохраняет двойное отношение точек на прямой.



Данное утверждение доказывалось при помощи соображения о том, что двойное отношение точек $(A, B; C, D)$ равно двойному отношению прямых $(OA, OB; OC, OD)$. Доказательство использовало площади и корректно работало при условии, что все точки не бесконечно удалены. Для полного доказательства нужно отдельно рассмотреть случай бесконечно удаленной точки. Этому посвящена первая задача.

Двойным отношением точек A, B, C, D *на окружности* называется двойное отношение прямых OA, OB, OC, OD, где O — еще одна точка на окружности.

Центральное проектирование с окружности на прямую и с прямой на окружность сохраняет двойное отношение.



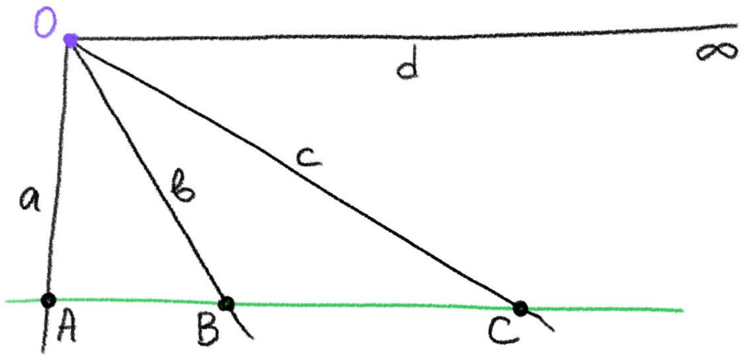
$$(A, B; C, D) = (a, b; c, d) = (A', B'; C', D')$$

Данное утверждение очевидно по определению, если центр проекции O не совпадает ни с одной точкой. В случае же, когда он совпадает (скажем, с точкой A), проецировать тоже можно, но вместо прямой OA нужно рассматривать касательную к окружности. Данному соображению посвящена задача 2.

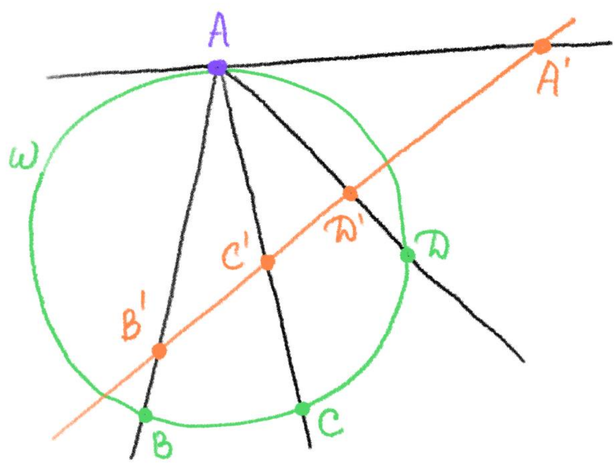
Если даны три точки и двойное отношение, то четвертая точка восстанавливается однозначно. Иными словами, если $(A, B; C, X) = (A, B; C, Y)$, то $X = Y$. Отметим, что данное утверждение верно как для точек на прямой, так и для точек на окружности.

Задачи

1. Даны четыре прямые a, b, c, d, пересекающиеся в одной точке. Прямые a, b, c пересекают прямую, параллельную прямой d, в точках A, B, C соответственно. Докажите, что $(a, b; c, d) = (A, B; C, \infty)$.



2. Даны прямая l и окружность ω. На окружности выбраны точки A, B, C, D. Прямые AB, AC, AD и касательная к ω в точке A пересекают l соответственно в точках B', C', D' и A'. Докажите, что $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$.

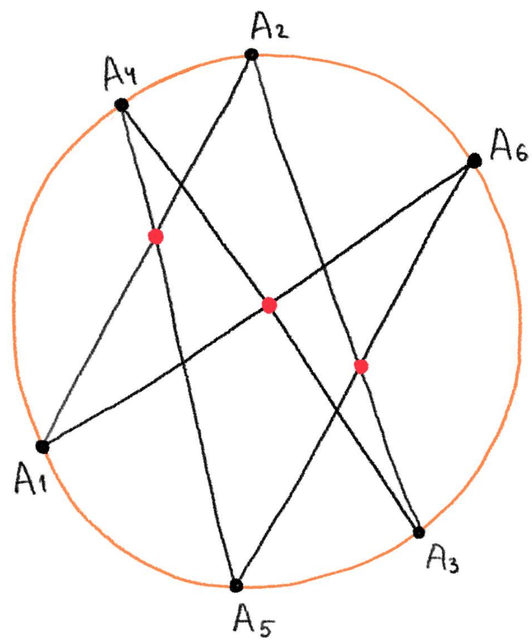


3. Точки A, B, C, D лежат на одной *окружности*. Докажите, что их двойное отношение можно вычислить по формуле

$$(A, B; C, D) = \pm \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD},$$

причем знак «$-$» ставится в том случае, когда отрезки AB и CD пересекаются.

4. (**Теорема Паскаля**) На окружности даны точки $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ докажите, что точки пересечения пар прямых A_1A_2 и A_4A_5, A_2A_3 и A_5A_6, A_3A_4 и A_6A_1 лежат на одной прямой.



5. На стороне AB четырехугольника ABCD взята точка M_1. Пусть M_2 — проекция M_1 на прямую BC из D, M_3 — проекция M_2 на CD из A, M_4 — проекция M_3 на DA из B, M_5 — проекция M_4 на AB из C и т. д. Докажите, что $M_{13} =$ $= M_1$.