Домашка №4

Нормальная подгруппа. Факторгруппа

(Все утверждения и теоремы можно использовать без доказательства)

1. Пусть N — нормальная подгруппа группы G, причем N состоит из элементов n_1, n_2, $\dots$. Пусть, далее, g — произвольный элемент группы G. Рассмотрим множество $S = \{gn_1g^{-1},\ gn_2g^{-1}, \dots\}$. Докажите, что множества S и N совпадают. (Нормальная подгруппа самосопряжена.)

2. Найдите все подгруппы группы симметрий ромба. Какие из них являются нормальными подгруппами? Найдите факторгруппу по какой-то из нормальных подгрупп.

Определение. Пусть G — группа, а g — ее элемент. Определим отображение $\varphi_g(h) = ghg^{-1}$ (где h — любой элемент группы). Это отображение называется *внутренним автоморфизмом* группы G, порожденным элементом g.

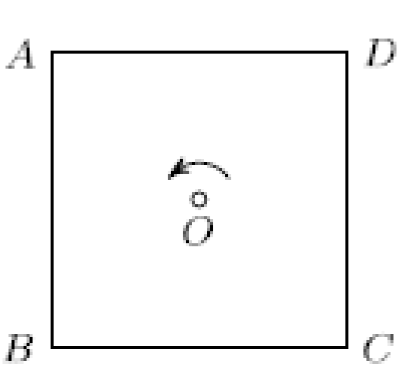
3. Докажите, что внутренний автоморфизм группы является изоморфизмом группы на себя.

Определение. Подгруппа некоторой группы называется *нормальной подгруппой*, если она переходит в себя при всех внутренних автоморфизмах.

Теорема. Подгруппа N группы G является нормальной подгруппой тогда и только тогда, когда левое и правое разложения группы G по подгруппе N совпадают.

4. Пусть n порядок группы G, m — порядок подгруппы H и $m = n/2$. Доказать, что H является нормальной подгруппой группы G.

Пример. Пусть e, a, b, c обозначают соответственно вращения квадрата на $0°$, $180°$, $90°$, 270 в направлении указанном стрелкой. Пусть d, f, g, h обозначают отражения относительно осей, указанных на рисунке



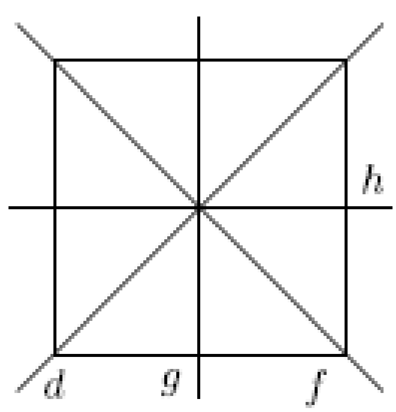


Таблица Кэли для нее приведена ниже.

	e	a	b	c	d	f	g	h
e	e	a	b	c	d	f	g	h
a	a	e	c	b	f	d	h	g
b	b	c	a	e	g	h	f	d
c	c	b	e	a	h	g	d	f
d	d	f	h	g	e	a	c	b
f	f	d	g	h	a	e	b	c
g	g	h	d	f	b	c	e	a
h	h	g	f	d	c	b	a	e

5. Рассмотрим подгруппу A симметрий квадрата D_4 , состоящую из отражений относительно диагоналей и центра (подгруппа $\{e, a, d, f\}$).

(а) Покажите, что подгруппа A является нормальной подгруппой группы D_4.

(б) Покажите, что подгруппа $B = \{e,\ d\}$ является нормальной подгруппой группы A.

(в) Покажите, что группа B не является нормальной подгруппой в D_4.

Утверждение. Смежные классы группы G по ее нормальной подгруппе K образуют группу. Эту группу мы будем называть фактор группой и обозначать G/K.

Определение. Определим *произведение двух смежных классов* R и S (в таком порядке) как множество всех произведений вида rs (в таком порядке), где $r \in R$, $s \in S$.

Замечание. Такое произведение легко искать по таблице умножения.

Утверждение. Если R и S смежные классы по нормальной подгруппе, то $R \cdot S$ – тоже смежный класс по этой нормальной подгруппе.

6. **(а)** Разложите группу симметрий квадрата по нормальной подгруппе, состоящей из центральных симметрий $\{e,\ a\}$.
(б) Найдите произведение двух смежных классов и убедитесь, что получается снова смежный класс.
(в) Будет ли фактор-группа группы симметрий квадрата по подгруппе центральных симметрий изоморфна группе вращений квадрата или группе симметрий ромба?