Домашка №3

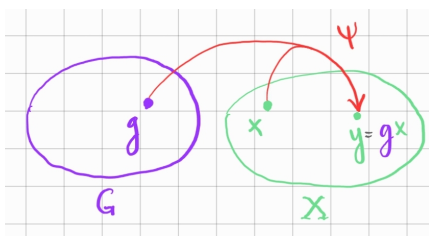
Действие группы. Орбиты. Стабилизаторы

1. Рассмотрим следующий набор функций (они принадлежат к классу преобразований Мебиуса):

$$h_1(x) = x,\ h_2(x) = \frac{1}{x},\ h_3(x) = 1 - x,\ h_4(x) = \frac{1}{1-x},\ h_5(x) = \frac{x-1}{x},\ h_6(x) = \frac{x}{x-1}.$$

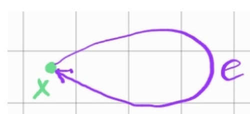
(а) Покажите что эти функции образуют группу (для операции композиции). Назовем ее) G. **(б)** Нарисуйте диаграмму Кэли для этой группы. **(в)** Какой другой известной группе изоморфна G?

Определение. Пусть G — группа, а X — множество. Будем говорить, что G *действует* на X, если задана операция $\psi : G \times X \to X$ (образ пары (g, x) обозначается обычно просто gx),

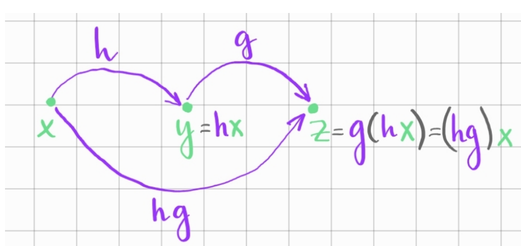


обладающая для любого $x \in X$ и следующими свойствами:

1. $ex = x$, где e — нейтральный элемент G, а x — любой элемент из X;



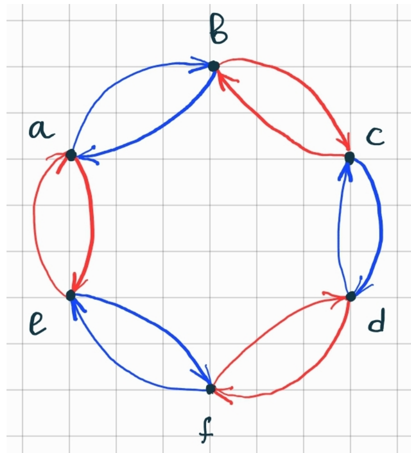
2. $g(hx) = (gh)x$, где g и h — любые элементы G, а x — любой элемент из X.



2. Пусть X — некоторое множество. Докажите, что совокупность всех биекций $X \to X$ с операцией суперпозиции образует группу.

Определение. Такая группа (из упражнения 2) называется *симметрической группой* на множестве X. Обозначение: S_X. В частности для конечного множества из n элементов это группа перестановок S_n.

3. Постройте по диаграмме Кэли группы G (см. картинку) ее таблицу умножения. Знаете ли Вы эту группу?



4. Докажите, что любой гомоморфизм $\varphi : G \to S_x$ задает действие группы G на множестве X по правилу $gx = \varphi(g)(x)$. (Проверьте, что эта операция действительно удовлетворяет условиям определения.)

5. Обратно, если задано действие G на X, то можно задать гомоморфизм $\varphi : G \to S_X$ формулой $\varphi(g)(x) = gx$. (Проверьте, что $\varphi(g)$ биекция и что φ — гомоморфизм.)

Таким образом, можно считать, что действие группы на множестве — это гомоморфизм $G \to S_X$ (альтернативное определение).

Определение. *Орбита* действия G на элемент $x \in X$:

$$O_x = \{gx : g \in G\} \subset X.$$

6. Найдите орбиты действия группы S_3 на множестве X, если **(а)** $X = \{1, 2, 3\}$; **(б)** $X = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ (действие элемента $\sigma \in S_3$ на пару $(x, y) \in X$ определяется следующим образом: $\sigma(x, y) = (\sigma x, \sigma y)$.)

7. Найдите все орбиты группы G порожденной подстановкой

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 3 & 9 & 4 & 10 & 6 & 2 & 1 & 7 \end{matrix}$$

Определение. *Неподвижными точками* элемента $g \in G$ называются те $x \in X$, для которых $gx = x$. Множество неподвижных точек элемента g обозначается через X^g.

8. **(а)** Для каждого элемента группы перестановок S_3 найдите множество неподвижных точек в $X = \{1, 2, 3\}$. **(б)** Для каждого элемента группы симметрий треугольника D_3 найдите множество неподвижных точек плоскости.

Определение. *Стабилизатор* элемента $x \in X$:

$$G_x = \{g \in G : gx = x\} \subset G.$$

9. Найдите все стабилизаторы группы G порожденной подстановкой

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 3 & 9 & 4 & 10 & 6 & 2 & 1 & 7 \end{matrix}$$

10. **(a)** Найдите стабилизатор каждого из элементов множества $X = \{1, 2, 3\}$ под действием группы S_3.

11. Найти стабилизатор каждой точки плоскости **(a)** под действием группы симметрий треугольника; **(б)** под действием группы поворотов (всех возможных) вокруг фиксированной точки.

12. Группа G действует на множестве X. Докажите, что стабилизатор G_x любого элемента $x \in X$ — это подгруппа в G.

13. Пусть X — некоторое множество, G — группа, действующая на X. Зафиксируем $y \in X$ и пусть для некоторых $x \in X$ и $\tilde{g} \in G$ справедливо $x = \tilde{g}y$. Докажите, что $G_y = \tilde{g}G_x\tilde{g}^{-1}$.