Домашка №2

Гомоморфизм групп. Граф Кэли

Определение. Отображение группы $(G, \cdot)$ на группу $(H, *)$ называется *гомоморфизмом*, если выполняется свойство

$$f(a \cdot b) = f(a) * f(b).$$

1. Постройте таблицы умножения групп C_2 с образующей b и C_4 с образующей a (C_n — циклическая группа порядка n). Покажите, что отображение, задаваемое следующей таблицей является гомоморфизмом групп:

$$f\colon \begin{pmatrix} I & a & a^2 & a^3 \\ I^* & b & I^* & b \end{pmatrix}.$$

2. Докажите, что если отображение f группы G в группу H не переводит единичный элемент группы G в единичный элемент группы H, то оно не гомоморфно.

3. Пусть f — гомоморфизм группы G в группу H. Покажите, что если x^{-1} — обратный к x элемент, то $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$.

4. Пусть f — гомоморфизм группы G в группу H и пусть $f(x) = f(y)$ для некоторых двух элементов x и y группы G. Покажите, что $f(xy^{-1}) = f(x^{-1}y) = I$.

5. Пусть f — гомоморфизм группы G в группу H. Докажите, что

(а) если $f(x) = I$ и $f(y) = I$, то $f(xy) = I$;

(б) если $f(xy) = I$, то $f(yx) = I$.

Определение. Взаимно однозначное гомоморфное отображение одной группы на другую называется *изоморфизмом*.

6. Пусть группа H состоит из корней уравнения $x^4 - 1 = 0$ (корни могут быть комплексными). Групповая операция — обычное умножение. Постройте изоморфизм между группами H и C_4.

Определение. Группа $(G, *)$ называется *циклической*, если она порождена одним элементом a, то есть все её элементы являются степенями a. Если все степени a различны, то такая группа называется *бесконечной циклической* группой.

7. Нарисуйте граф Кэли бесконечной циклической группы.

8. Выясните, являются ли каждое из следующих множеств замкнутыми относительно операции сложения, и, если да, то будет ли множество с операцией сложения бесконечной циклической группой.

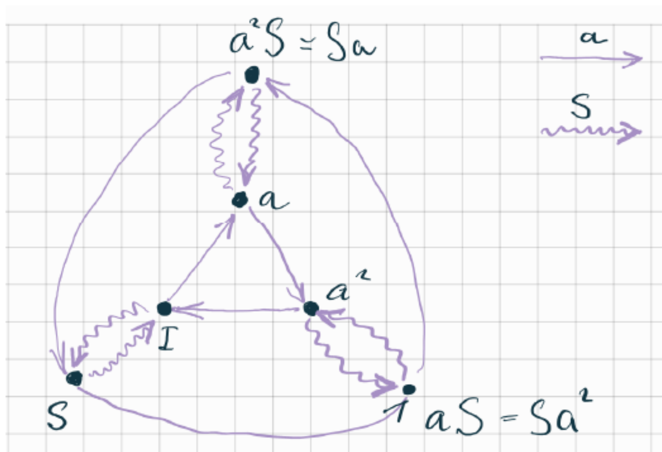
(а) Множество всех целых чисел, кратных 4, т. е. множество $\{\ldots,\ -8,\ -4,\ 0,\ 4,\ 8,\ \ldots\}$.

(б) Множество всех целых чисел, кратных целому числу k.

(в) Множество $\{\ldots, a-3,\ a-2,\ a-1,\ a,\ a+1,\ a+2,\ a+3, \ldots\}$, где a — нецелое число.

(г) Множество $\{\ldots,\ -3a,\ -2a, -a,\ 0,\ a,\ 2a,\ 3a, \ldots\}$, где a — нецелое число.

9. На рисунке приведен граф Кэли для группы D_3.

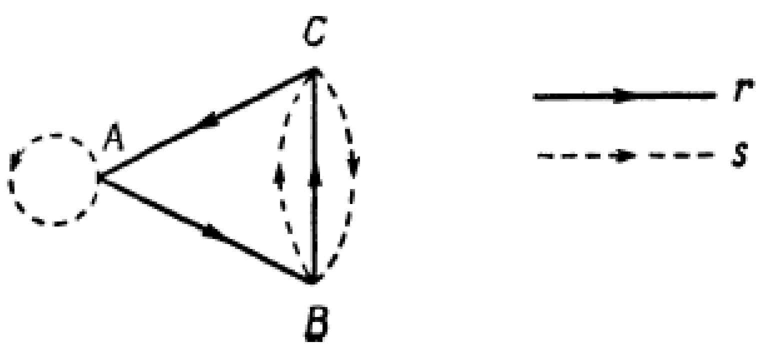


(а) Нарисуйте пути, соответствующие выражениям aS и Sa^2. Убедитесь, что эти выражения равны.

(б) Аналогичным способом покажите, что $SaaS = a$.

(в) Используя граф, найдите чему равно выражение $SaSa$.

10. Докажите, что приведенный ниже граф не является графом группы. *Подсказка:* составьте «слово» из a и S (например $aSaSaaa$), которое в одной из вершин соответствовало бы замкнутому пути, а в другой нет.



11. Для группы симметрий ромба (см. предыдущую домашнюю работу) нарисуйте граф Кэли.