Определение группы. Симметрии Треугольника

Пусть V — линейное n-мерное пространство, а V^* — сопряженное к нему.

Упражнения

1. Пусть $(G;*)$ — *группа*, то есть для любых элементов a, b, c из G и бинарной операции $* : G \times G \to G$ справедливо следующее:

1. $a * b \in G$ (*замкнутость операции* $*$ *в* G);
2. $(a * b) * c = a * (b * c)$ (*ассоциативность* $*$);
3. $\exists e \in G: \; a * e = e * a = a$ (*существование нейтрального элемента*);
4. $\exists a^{-1} \in G: \; aa^{-1} = a^{-1}a = e$ (*существование обратного элемента*).

Докажите, что нейтральный элемент e единственный в G, и обратный a^{-1} — единственный для каждого a.

2. Движения плоскости, сохраняющие равносторонний треугольник, называют *симметриями* треугольника (в обобщенном смысле). Докажите, что операция суперпозиции ассоциативна на множестве симметрий треугольника. Заполните таблицу умножения (*таблице Кэли*) симметрий треугольника. (Достаточно заполнить нижний правый квадрат таблицы, остальное мы обсудили на лекции).

3. Составьте таблицу Кэли для группы симметрий ромба, не являющегося квадратом.

4. Составьте таблицу умножения для приведённой системы вычетов по модулю 8, состоящей из классов 1, 3, 5, 7.

5. Докажите обобщенный закон ассоциативности:

$$a_1 * a_2 * \cdots * a_n = a_1 * (a_2 * a_3) * \cdots * (a_{n-1} * a_n).$$

6. Ассоциативна ли операция $*$ на множестве M, если

1. $M = \mathbb{N}, \; x * y = x^y$;
2. $M = \mathbb{Z}, \; x * y = x^2 + y^2$;
3. $M = \mathbb{R}, \; x * y = \sin x \cdot \sin y$?

7. Докажите, что в таблице умножения конечной группы в каждой строке и каждом столбце все элементы встречаются ровно один раз.