Домашка по группам №1

Перестановки

Определение. Пусть $(G;*)$ — *группа*, то есть для любых элементов a, b, c из G и бинарной операции $* : G \times G \to G$ справедливо следующее:

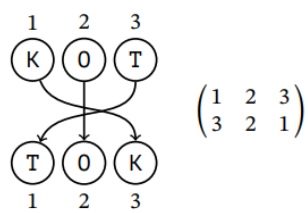
1. $a * b \in G$ (*замкнутость операции* $*$ в G);
2. $(a * b) * c = a * (b * c)$ (*ассоциативность* $*$);
3. $\exists e \in G:\ a * e = e * a = a$ (*существование нейтрального элемента*);
4. $\exists a^{-1} \in G:\ aa^{-1} = a^{-1}a = e$ (*существование обратного элемента*).

1. Докажите, что нейтральный элемент e единственный в G, и обратный a^{-1} — единственный для каждого a.

2. Пусть X — некоторое множество. Докажите, что совокупность всех биекций $X \to X$ с операцией суперпозиции образует группу.

Определение. Группа из предыдущего упражнения называется *симметрической группой* на множестве X. Обозначение: S_X. В частности для конечного множества из n элементов это группа перестановок S_n.

Любую перестановку можно задать таблицей или "стрелочками".



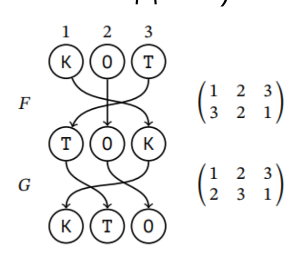
Любую перестановку можно задать таблицей или "стрелочками

3. Буквы слова САТИР занимают пять позиций, пронумерованных слева направо числами $1, 2, \ldots, 5$. Напишите, какое слово получится после перестановки

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&4&5&1\end{pmatrix}$$

4. Запишите перестановку, переводящую слово КОНУС в слово СУКНО. (Позиции букв в слове КОНУС нумеруются слева направо числами от 1 до 5.)

Определение Произведение перестановок мы будем называть их "последовательное применение"и записывать $H = G \cdot F$.
ВНИМАНИЕ! В разных книгах могут писать



такое умножение в разном порядке.

5. Найдите $F \cdot F$, если $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

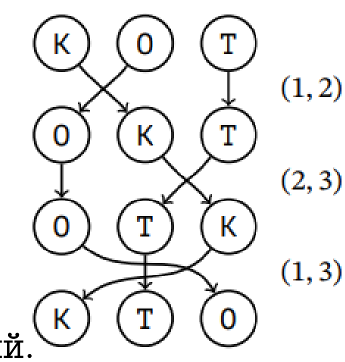
6. Найдите обратную к перестановке

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Приведите пример двух перестановок F и G, для которых $F \cdot G \neq G \cdot F$. (Такой пример есть для трехэлементного множества).

Определение *Циклом* называется перестановка, которая переводит некий элемент a_1 в a_2, a_2 в a_3, ..., a_{k-1} в a_k, a_k в a_1, а остальные оставляет на месте. Число k называется длиной цикла. Транспозицией называется цикл длины 2. Транспозиция переставляющая два соседних элемента называется элементарной. Обозначение: $(a_1 a_2 \dots a_k)$.

Пример. Вычислим композицию $(13) \cdot (23) \cdot (12)$. Обратите внимание на порядок выполнения перестановок. Смотрите рисунок.



8. Как перестановка будет обратной к (ij).

9. **(а)** Покажите, что любая перестановка представляется в виде произведения циклов.

(б) Докажите, что любой цикл — произведение транспозиций.

10. Покажите, что любая перестановка является произведением элементарным траспозиций.

Определение *Порядком* перестановки σ называют наименьшее натуральное число n, что $\underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \dots \circ \sigma}_{n} = \mathrm{id}$.

11. Покажите, что у любой перестановки существует порядок.

12. Михаилу подарили собранный кубик Рубика. Он придумал последовательность манипуляций с головоломкой и начал усердно ее повторять. Докажите, что спустя некоторое число повторений своего алгоритма Михаил увидит собранный кубик.

Определение Назовем *инверсией* пару (i, j), если $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Определение *Четностью* перестановки называется четность числа инверсий в ней.

13. **(а)** Покажите, что умножение на транспозицию меняет четность перестановки.

(б) Докажите, что при любом разложении перестановки на транспозиции, число множителей будет иметь одинаковую четность.