Клеточные комплексы и характеристика Эйлера

17 мая 2023 г.

Определение. n-мерной клеткой будем называть пространство, гомеоморфное[1] $\mathbb{R}^n$ (или n-мерному открытому диску). Например, грань многогранника (без границы) является двумерной клеткой.

Определение. Клеточным, или CW-комплексом будем называть несвязное объединение клеток разной размерности:

$$X = \bigsqcup_{k=0}^{n} X_k, \tag{1}$$

где X_k – множество клеток размерности k.
Условие склейки: каждая k-мерная клетка должна непрерывно приклеена к объединению клеток меньшей размерности по границе.
Условие регулярности: каждая k-мерная клетка должна приклеиваться по границе к замыканию объединения $(k-1)$-мерных клеток.[2]

При исследовании топологических свойств пространства, это пространство «делят на клетки», т.е. представляют в виде некоторого клеточного комплекса.

Например, сферу можно представить в виде клеточного комплекса, содержащего 2 грани, 1 ребро и 1 вершину. В этом случае $B - \Gamma + P = 1 - 1 + 2 = 2$ (как и для многогранника).

---

[1]Гомеоморфизм – взаимно непрерывное биективное отображение пространств. Пространства, между которыми существует гомеоморфизм, называются *гомеоморфными*

[2]Строгое определение см., например, здесь:
Сосинский А. Б. Введение в топологию. Лекционный курс. МЦНМО, 2020.

Определение. *Характеристикой Эйлера* клеточного комплекса X называется величина

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n+1} |X_i|. \tag{2}$$

В двумерном случае $\chi(X)$ совпадает с определением для многогранника (вершины − рёбра + грани). Заметим, что любой многогранник обладает естественной структурой клеточного комплекса, поэтому наше определение обобщает случай многогранника.

Пример. Вычислим характеристику Эйлера клеточных комплексов на рис. 1 (считаем, что это поверхности, т.е. у них нет внутренности).

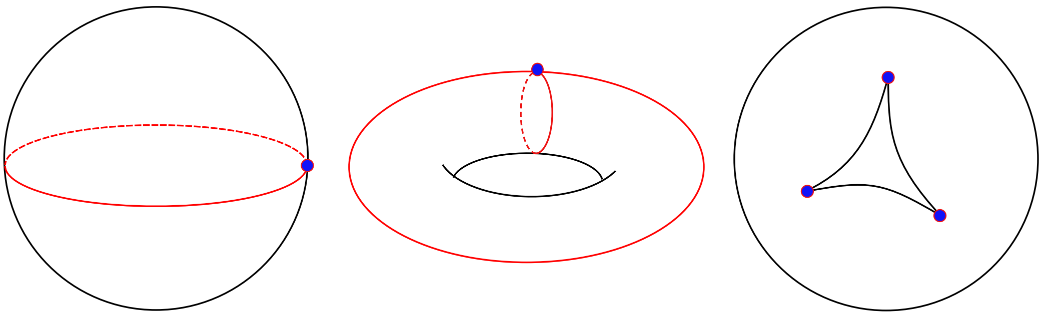


Рис. 1: Различные клеточные разбиения сферы и тора.

Для левой сферы $\chi = 1 - 1 + 2 = 2$, т.к. в разбиении одна вершина, одно ребро (экватор сферы) и две грани-полушария.

Для тора: $1 - 2 + 1$, т.к. в разбиении одна вершина, два ребра (соответствующие двум образующим окружностям тора) и одна грань: она действительно одна, см. развёртку тора на рис. 2.

Рис. 2: Развёртка тора.

Для правой сферы: $3 - 3 + 2 = 2$, т.к. в разбиении три вершины, три ребра и две грани.

Замечание. Если разрешить приклеивать двумерные грани по границе к нульмерным (такие клеточные комплексы называются *нерегулярными*), то сферу можно представить как объединение точки и диска, приклеенного по границе к точке. Тогда $\chi = 1 - 0 + 1 = 2$.

Теорема (без доказательства). Характеристика Эйлера пространства X не зависит от разбиения на клетки.

Утверждение (аддитивность характеристики Эйлера).

$$\chi(X \sqcup Y) = \chi(X) + \chi(Y).$$

Значком $\sqcup$ обозначается несвязное объединение, т.е. $X \cap Y = \varnothing$.

Упражнение 1. Вычислить характеристику Эйлера (а) замкнутого шара $\overline{\mathbb{B}}^3$; (б) сферы с k ручками; (в) сферы $\mathbb{S}^n$.

$\square$ (а) На рис. 1 заклеим внутренность любого разбиения сферы трёхмерным открытым шаром. Характеристика Эйлера при этом уменьшится на 1, т.е. $\chi(\overline{\mathbb{B}}^3) = 1$.

(б) Рассмотрим, что происходит при приклеивании «ручки» к поверхности. Это происходит так: на поверхности и на торе вырезается диск, затем поверхность и тор склеиваются по границе вырезанного диска, окружность (граница диска) становится ребром нового клеточного комплекса, на ней отмечаем точку и связываем рёбрами с двумя вершинами предыдущего комплекса так, чтобы правила построения комплекса не нарушались, см. рисунки 3, 4.

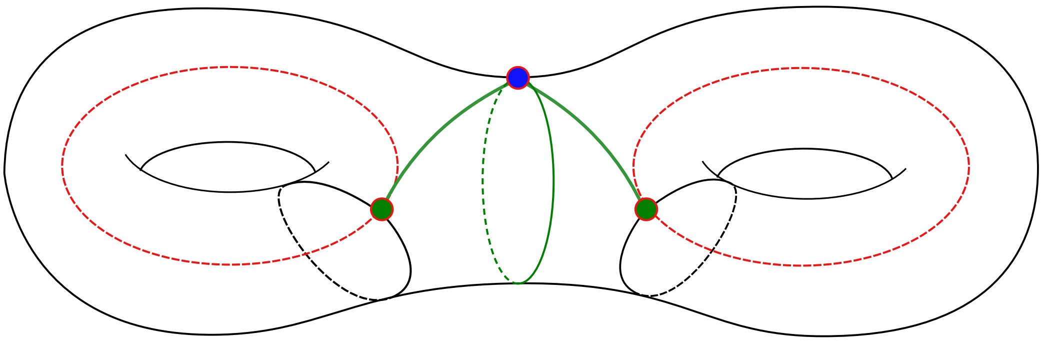


Рис. 3: Склейка по диску двух торов: из каждого вырезается диск, добавляется одна вершина (синяя) и три ребра (зеленые) так, чтобы выполнялись условия склейки.

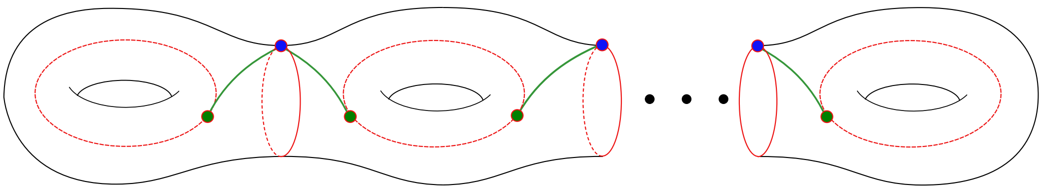


Рис. 4: Клеточное разбиение сферы с k ручками.

Характеристика Эйлера тора равна нулю, и если бы все клетки остались неизменными, то х. Э. бы не изменилась. Но у нас добавилась одна вершина (синяя) и три ребра (зелёных), поэтому х. Э. уменьшится на 2. По индукции по количеству ручек, характеристика Эйлера сферы с k ручками равна $2-2k$.

(в) Рассмотрим сферу

$$\mathbb{S}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

Пересечём её плоскостью $x_{n+1} = 0$. На пересечении окажется сфера

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}.$$

Рассмотрим множества $A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^n \,|\, x_{n+1} > 0\}$ и $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^n \,|\, x_{n+1} < 0\}$ – верхнее и нижнее полушария сферы. A гомеоморфно открытому шару $\mathbb{B}^n$ (гомеоморфизм – проекция A на плоскость $x_{n+1} = 0$).

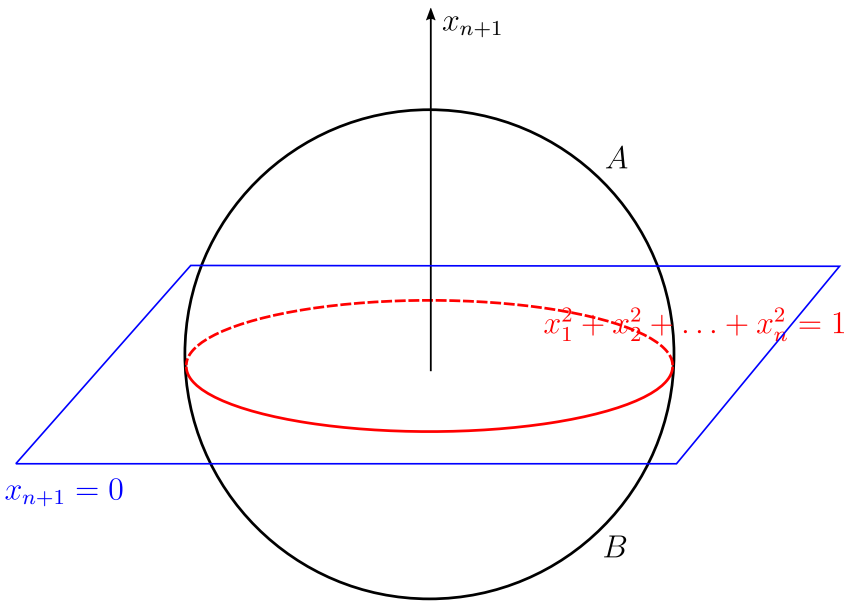


Рис. 5: Сечение n-мерной сферы плоскостью $x_{n+1} = 0$.

Получаем, что

$$\mathbb{S}^n = A \sqcup \mathbb{S}^{n-1} \sqcup B,$$

где $A \sim \mathbb{B}^n$, $B \sim \mathbb{B}^n$ (аналогично).

«Отложим в сторону» клетки A и B, аналогично рассмотрим сферу $\mathbb{S}^{n-1}$, поделим её гиперплоскостью $x_n = 0$ пополам, «отрежем» две $(n-1)$-мерные клетки, и т.д.:

$$\mathbb{S}^n = B_n \sqcup \mathbb{S}^{n-1} \sqcup B_n = B_n \sqcup B_{n-1} \sqcup \mathbb{S}^{n-2} \sqcup B_{n-1} \sqcup B_n = \ldots$$
$$\ldots = B_n \sqcup B_{n-1} \sqcup \ldots \sqcup B_1 \sqcup B_0 \sqcup B_0 \sqcup B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_{n-1} \sqcup B_n$$

В конце, получим нульмерную сферу – это граница отрезка (пара точек). Т.е. n-мерная сфера представилась в виде клеточного комплекса, состоящего из двух клеток каждой размерности от 0 до n. Тогда её характеристика Эйлера равна

$$2 - 2 + 2 - 2 + \ldots + (-1)^n \cdot 2 = \begin{cases} 0, & n \text{ нечётно} \\ 2, & n \text{ чётно.} \end{cases}$$

Замечание. Если отбросить условие регулярности, то сфера представляется в виде объединения сферы с выколотой точкой $\sim \mathbb{B}^n$ (см. упр. 4) и одной вершины (этой самой точки). В зависимости от чётности n, получается результат 2 или 0.

Выпуклый многогранник P обладает естественной структурой клеточного комплекса, а поскольку он (если не считать внутренность) гомеоморфен сфере, верна формула $\chi(P) = \text{В} - \text{Р} + \Gamma = 2$.

Далее, пусть A, B, $A \cup B$, $A \cap B$ – клеточные комплексы. Тогда верна формула включения-исключения:

$$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B).$$

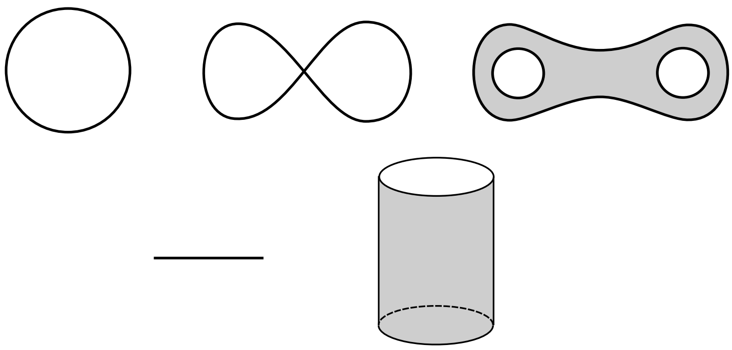
Действительно, рассмотрим множества клеток размерности k этих комплексов. Для этих множеств верна формула включения-исключения (обычная из теории множеств). Если взять знакопеременную сумму по всем размерностям, получим формулу для χ.

Комбинаторная характеристика Эйлера. Если не накладывать условие склейки клеток, то можно определить *комбинаторную характеристику Эйлера.* Её вычисление аналогично топологической характеристике Эйлера, обозначать её будем так же буквой χ.

Задачи

В задачах 1–3 имеется в виду топологическая характеристика Эйлера (все пространства естественным образом вложены в $\mathbb{R}^n$).

1. Вычислите характеристику Эйлера фигур, изображённых на рисунке (цилиндр без донышка, отрезок с граничными точками):



2. Чебурашка сорвал с пальмы кокос.
   (а) Вычислите характеристику Эйлера кокоса (внутри кокоса шаровая полость).
   (б) Ч. проделал отверстие, чтобы добраться до полости внутри кокоса. Чему теперь равна характеристика Эйлера кокоса?
   (в) Ч. стало скучно, и он сделал отверстие сквозным. Чему теперь равна характеристика Эйлера?

3. Чему равна характеристика Эйлера чаши Пифагора? (кто не знает, что это, гугл в помощь)

4. Постройте явно гомеоморфизм сферы $\mathbb{S}^n$ с выколотой точкой и открытого шара $\mathbb{B}^n$.

5. Вычислите количество граней разных размерностей (а) n-мерного куба $I_n = [0,1]^n$, (б) n-мерного симплекса S_n.

6. Какие комбинаторные равенства получаются, если явно вычислять характеристику Эйлера S_n и I_n? Докажите их.

7. Докажите *формулу включения-исключения*:
   пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — конечные множества,

$$M_1 = \sum_i |A_i|, \quad M_2 = \sum_{i_1 \neq i_2} |A_{i_1} \cap A_{i_2}|, \dots,$$

$$M_k = \sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \{1,2,\ldots,n\}} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|, \ldots$$

$$M_n = |A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n|,$$

тогда

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+1} M_i.$$