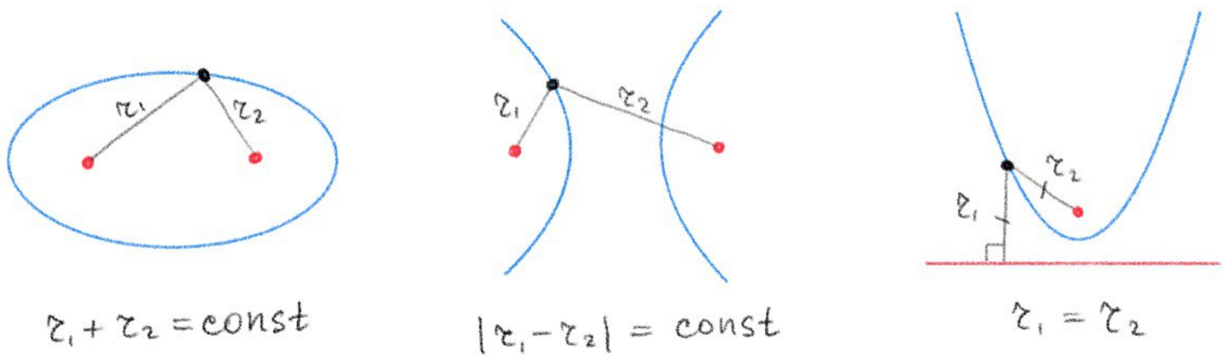
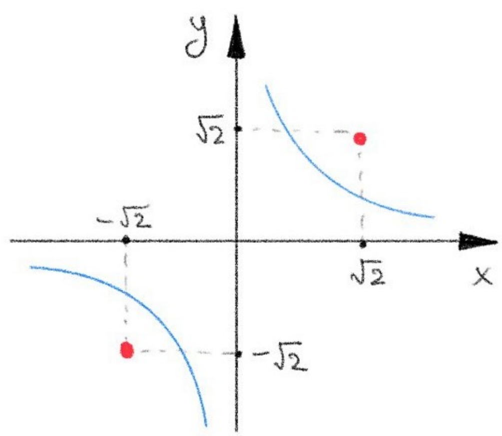
Домашка 3

Напоминание

Эллипс — ГМТ, для которых сумма расстояний до фокусов (двух заданных точек) фиксирована.
Гипербола — ГМТ, для которых разность расстояний до фокусов (двух заданных точек) фиксирована.
Парабола — ГМТ, равноудаленных от фокуса (заданной точки) и директриссы (заданной прямой).



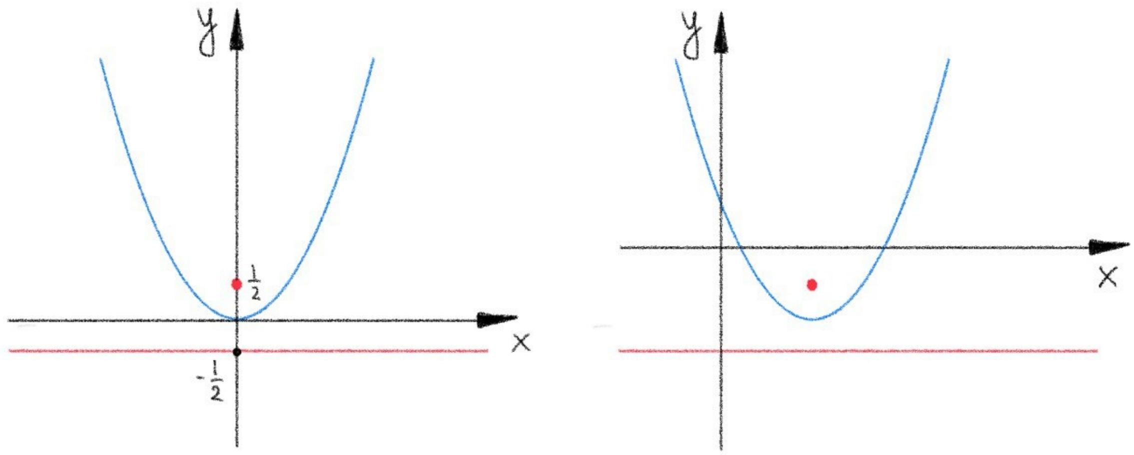
1. Докажите, что график уравнения $y = \frac{1}{x}$ — это гипербола (в смысле определения выше) с фокусами $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ и $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.



2. Пусть дана парабола (в смысле определения выше).

(a) Введем систему координат так, что фокус имеет координаты $(0, \frac{1}{2})$, а директрисса задается уравненеием $y = -\frac{1}{2}$. Докажите, что в такой системе координат парабола задается уравнением $y = x^2$.

(б) Введем на плоскости систему координат, таким образом, что ось абсцисс окажется параллельна директриссе, а ось ординат ей перпендикулярна. Докажите, что в этой системе координат парабола определяется уравнением $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — некоторые вещественные константы.



Утверждение. Пусть $\alpha, \beta, p > 0$ — фиксированные параметры. Следующие уравнения задают конические сечения:

$\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ — эллипс;

$\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ — гиперболу;

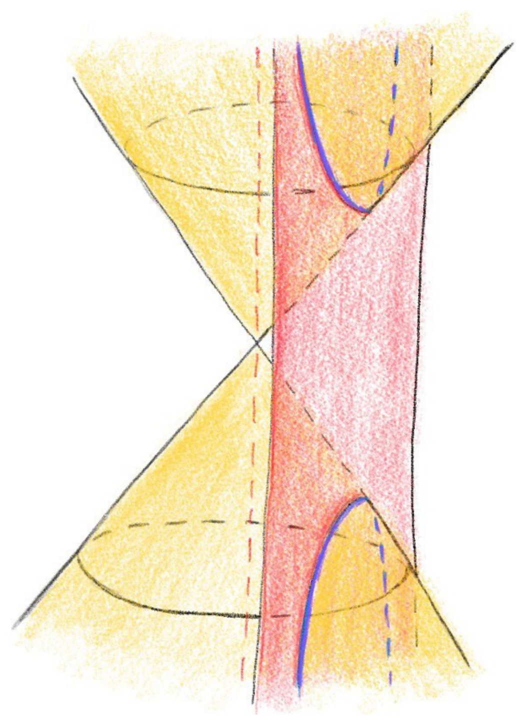
$y^2 = 2px$ — параболу.

3. Найдите фокусы:

(а) эллипса $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$;

(б) гиперболы $\dfrac{x^2}{9} - y^2 = 1$;

(в) параболы $y^2 = 3x$.



4. Докажите, что плоскость, параллельная двум образующим конуса, пересекает его по гиперболе.

---

5. Если сфотографировать (или нарисовать) фонарные столбы, они обычно получаются параллельными. Где должен поместиться фотограф, чтобы столбы на снимке оказались не параллельными. Ответ обоснуйте.

6. Пусть на картине изображены два столба с учетом перспективы. Где нарисовать столб, находящийся посередине между ними?