Домашка по группам №1

Многогранники

Определение. *Выпуклым многогранником* мы будем назвать выпуклую оболочку конечного числа точек в R^d. Будем обозначать множество выпуклых многогранников в R^d через P^d.

Определение. *Суммой Минковского* двух множеств A и B называется множество

$$A \otimes B = \{z : \ z = a + b, \text{где } a \in A, \ b \in B\}$$

!!!! Здесь мы пока не факторизуем. !!!!

1. Найдите сумму **(а)** двух параллельных отрезков; **(б)** двух не параллельных отрезков; **(в)** треугольника и отрезка, лежащих в одной плоскости; **(г)** треугольника и отрезка, не лежащих в одной плоскости.

2. Докажите, что операция $\otimes$ снабжает множество P^d структурой коммутативной полугруппы.

В следующих задачах подразумевается, что K_1, K_2 и L — многогранники, а p_1 и p_2 — векторы.

3. Докажите, что $L \otimes L$ — есть многогранник растянутый в два раза.

4. Докажите, что

$$(K_1 \otimes p_1) \otimes (K_2 \otimes p_2) = (K_1 \otimes K_2) \otimes (p_1 \times p_2).$$

5. Докажите, что выполняется закон сокращения

$$K_1 \otimes L = K_2 \otimes L \Leftrightarrow K_1 = K_2$$

Определение. Определим *характеристическую (индикаторную) функцию* множества S равенством

$$I_S(x) = \begin{cases} 1, & x \in S \\ 0, & x \notin S \end{cases}$$

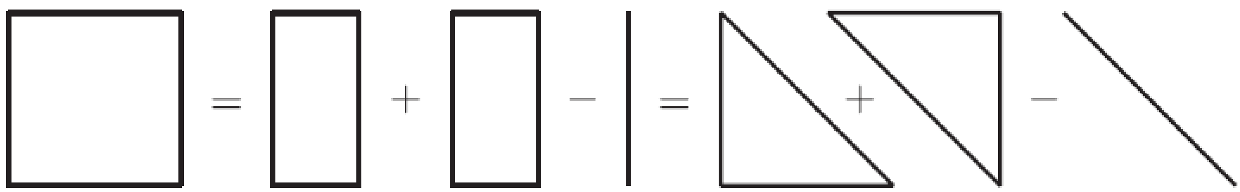
Определение. Будем называть функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ *многогранной*, если она представима в виде

$$f = a_1 I_{Q_1} + \cdots + a_k I_{Q_k},$$

где Q_i — выпуклые многогранники, а a_i — целые числа (мы будем называть эти коэффициенты весами). Слагаемые I_{Q_i} могут соответствовать «частям» разных размерностей, включая одноточечные многогранники.

Обозначение. Через SP^d обозначим *множество многогранных функций.*

Замечание. Разложение многогранной функции не единственно.



Произведение многогранных функций.

Произведением $f \otimes g$ двух многогранных функций $f = \sum_i a_i I_{K_i}$ и $g = \sum_j b_j I_{L_j}$ определим формулой

$$f \otimes g = (\sum_i a_i I_{K_i}) \otimes (\sum_j b_j I_{L_j}) := \sum_{i,\ j} a_i b_j I_{K_i \otimes L_j}.$$

Такое определение позволит нам задать на SP_d структуру коммутативного кольца. Единицей E будем считать I_O, где O — начало координат, а нулем тождественно нулевую функцию.

!!!! В алгебре многогранных функций мы не факторизуем по параллельным переносам, т.е. мы различаем многогранник и его сдвиг. !!!!

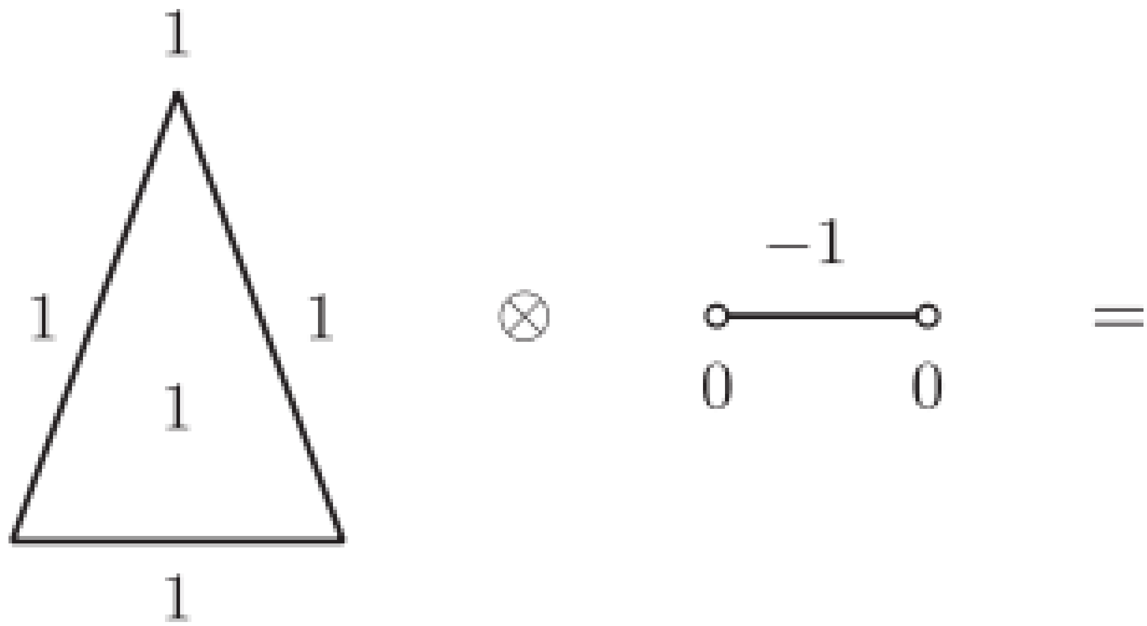
Обозначение. $\mathrm{Rint}\ K$ — относительная внутренность K.

6. Пусть K — выпуклый многоугольник. Покажите, что $I_{\mathrm{Rint}\ K}$ — многогранная функция.

7. Пусть K — квадрат на плоскости. Докажите по определению, что $I_K * I_{\mathrm{Rint}\ K} = I_0$.

Утверждение. Для всякого выпуклого многогранника K его характеристическая функция обратима в кольце многогранных функций и $I_K^{-1} = (-1)^{\dim K} I_{\mathrm{Rint}(\mathrm{Symm}\ K)}$, где Symm — симметрия относительно начала координат.

8. Изобразите результат вычисления


1
1
1
1
1
⊗
−1
0
0
=